

# Einführung in die innere Ballistik

Nach dem Vorlesungsmanuskript und den Arbeiten

von

**Dr. E. Bollé †**

Oberregierungsrat  
und Mitglied der Chemisch-Technischen Reichsanstalt

bearbeitet von

**Dr. G. Seitz**

Regierungsrat  
bei der Chemisch-Technischen Reichsanstalt Berlin



---

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

1941

## **48 Abbildungen**

ISBN 978-3-663-03752-1      ISBN 978-3-663-04941-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-04941-8

**Alle Rechte vorbehalten**

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1941

## Vorwort

Es wird ein allgemeiner Überblick über die Meßmethoden gegeben, die in der inneren Ballistik zur Anwendung kommen, vor allem über die zur Bestimmung des Höchstgasdruckes und des Gasdruckverlaufs sowie der Geschößgeschwindigkeit. Die Verbrennungsweise des Pulvers und die verschiedenen Theorien werden eingehend vorgetragen. Die wichtigsten empirischen und theoretischen Formelsysteme zur Lösung des innerballistischen Hauptproblems, insbesondere der Vorausberechnung der Anfangsgeschwindigkeit und des Höchstgasdruckes, werden dargestellt und ihre Leistungsfähigkeit kritisch besprochen. Die mathematische Entwicklung der Formeln wird dabei nur soweit gebracht, wie sie zum Verständnis unbedingt erforderlich ist. Von den das Gebiet der inneren Ballistik berührenden Aufgaben werden die Reibungsvorgänge und die Festigkeitsverhältnisse eingehend dargelegt. Die an sich nicht unmittelbar zur Ballistik gehörenden Explosions- und Detonationsvorgänge sind mit aufgenommen worden, weil Bollé auf diesem Gebiet Hervorragendes geleistet hat.

Alle Formeln beziehen sich auf das technische Maßsystem. Hierbei ist die Einheit der Kraft das Kilopond (kp), diejenige Kraft, die einem Körper von der Masse eines Kilogramms je Sekunde die Geschwindigkeitsänderung von 9,81 m/sec erteilt (siehe Amtsblatt der PTR. 15, 40, 1939).

Für die bereitwillige Überlassung der Manuskripte möchte ich Frau Bollé meinen besten Dank aussprechen.

Berlin, im September 1940.

Dr. Georg Seitz

# Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung. Ziel und Aufgabenbereich der inneren Ballistik ...	1
II. Meßmethoden der inneren Ballistik .....	10
1. Gasdruckmessung mit dem Stauchzylinder .....	10
a) Allgemeines .....	10
b) Meßei (Geschütz) .....	10
c) Gasdruckmessung bei Handfeuerwaffen .....	11
d) Abweichung des mit dem Stauchzylinder gemessenen Druckes vom absoluten Druck .....	13
Experimentelle Untersuchungen .....	13
Theoretische Überlegungen .....	16
e) Messung des Druckverlaufs .....	20
2. Druckaufzeichnung mittels starker Feder .....	21
3. Piezoelektrisches Druckmeßverfahren .....	22
4. Rücklaufmessung .....	24
5. Geschößgeschwindigkeitsmessung .....	32
III. Empirische Formeln zur Berechnung der inner-ballistischen Werte .....	34
1. Berechnung nach Heydenreich .....	34
2. Formelsystem von Leduc und Leduc-Bollé .....	36
IV. Verbrennungsweise des Pulvers .....	42
1. Allgemeines .....	42
2. Verbrennungsgesetz von Vieille und Gossot und Liouville .....	46
3. Verbrennungsgesetz von Charbonnier .....	50
V. Lösung des inner-ballistischen Hauptproblems durch geschlossene Formelsysteme .....	55
1. Allgemeine und geschichtliche Darstellung .....	55
2. Lösung von Gossot und Liouville .....	57
3. Lösung von Charbonnier .....	65
4. Lösung von Schmitz-Cranz .....	73
5. Lösung von Langweiler .....	76

## VI

VI. Weitere Aufgaben der inneren Ballistik.....	90
1. Einpreßwiderstand und Geschoßreibung .....	90
a) Allgemeine und geschichtliche Behandlung der Aufgabe....	90
b) Experimentelle Methode zur Bestimmung der Geschoßreibung beim Schuß von Bollé-Bodlien .....	98
2. Berechnung der Geschützrohre (Festigkeitslehre) .....	103
3. Explosion und Detonation .....	114
Namenverzeichnis .....	136
Sachverzeichnis .....	138

## Zum Geleit

Mit dem Tode von Oberregierungsrat Dr. Erwin Bollé am 9. November 1938 wurde in der Chemisch-Technischen Reichsanstalt, der er 35 Jahre angehört hatte, eine tiefe Lücke gerissen. Mit großen Gaben des Geistes und einer besonderen Befähigung für die Aufgaben der inneren Ballistik ausgerüstet, hat er auf diesem Gebiete Vorbildliches geleistet und durch sein überragendes Wissen und Können und die restlose Hingabe an seinen Beruf bleibende Werte geschaffen. Seine Arbeiten sind in der einschlägigen Literatur den Fachkreisen bekanntgeworden. Sie wird vervollständigt durch das hier erscheinende kleine Werk, in dem die Vorträge und Vorlesungen zusammengefaßt sind, die Dr. Bollé an der Technischen Hochschule Berlin in den letzten Jahren gehalten hat und die sein Mitarbeiter Dr. Seitz nach den vorhandenen Manuskripten zu einem einheitlichen Ganzen gebracht und durch neuere Erkenntnisse im Sinne Bollés ergänzt hat.

Möge dieses kleine Werk mit seinem wertvollen Inhalt weiteste Verbreitung finden bei allen denen, die das Studium der inneren Ballistik beruflich betreiben, aber auch bei denen, die über die innere Ballistik und die Explosionsvorgänge unterrichtet sein wollen, um ihre eigenen Kenntnisse und ihr Wissen zu vertiefen.

Berlin, im Oktober 1940.

Prof. Dr. Rimarski

# I. Einleitung

Die innere Ballistik kann man allgemein als die Lehre von den Vorgängen oder dem Kräftespiel kennzeichnen, die einer schweren Masse eine Anfangsgeschwindigkeit von bestimmter Größe und Richtung erteilen. In diesem Sinne gehören alle Wurfaffen, deren sich der Mensch zur Bekämpfung mehr oder weniger von ihm entfernter Ziele je bedient hat, in den Bereich unserer Wissenschaft. Sie alle sind verbunden durch den Impulssatz der Mechanik. Wenn eine im allgemeinen veränderliche Kraft  $P$  während der Zeit  $\tau$  auf eine Masse  $m$  einwirkt, so erteilt sie der Masse eine Geschwindigkeit  $v$  derart, daß  $mv = \int_0^{\tau} P dt$  ist. Man könnte demnach vom mathematischen Standpunkt aus als den Gegenstand der inneren Ballistik

auch eine eingehende Untersuchung des Integrals  $\int_0^{\tau} P dt$  in den verschiedensten Fällen bezeichnen. Wir haben im Weltkrieg das Wieder-aufleben der ältesten Anwendungen von Kräften erlebt, die in den Kriegen des 19. Jahrhunderts als überholt gelten konnten, so der Muskelkraft zum Schleudern von Handgranaten und von mechanischen Wurfmaschinen zum Schleudern kleiner Minen. Man hat auch in unserer Zeit den Bogenschuß, der ja in England einen heute noch beliebten Sport bildet, genauer durch Messung der dabei erreichten Geschwindigkeiten und Untersuchung der hier vorliegenden Bedingungen wissenschaftlicher Forschung unterzogen. In den Luftdruckgewehren wird die Spannkraft stark komprimierter Luft benutzt, deren man sich auch vorzugsweise beim Abschuß von Torpedos bedient. Auch die Verwendung elektromagnetischer Kräfte zur Bewegung von Geschossen ist schon vielfach vorgeschlagen und besprochen worden.

Aber wenn die Verwendung derartiger Energiequellen heute vielleicht nicht als undurchführbar selbst zum Erzielen großer Wurfleistungen gelten kann, so würde zum Bereitstellen der nötigen Energien sicherlich eine so umfangreiche Apparatur benötigt werden, daß demgegenüber die Anwendung chemisch gebundener Energie, wie sie im Schwarzpulver und noch mehr in den neuzeitlichen Treibstoffen unserer Feuerwaffen vorliegt, einen wohl kaum je zu erreichenden Vorrang besitzt.

Im engeren Sinne verstehen wir daher hier die innere Ballistik als die Wissenschaft von den Vorgängen in den Feuerwaffen vom Augenblick der Zündung des Treibmittels bis zum Austritt des Geschosses aus dem Rohr der Waffe. Die Umwandlung der festen Treibmittel in hochoberhitze und hochgespannte Gase ist ein thermochemischer, die Umsetzung der Gasenergie in lebendige Kraft des Geschosses ein thermodynamischer und mechanischer Vorgang. Thermodynamik und Mechanik sind also die Grundlagen unserer Wissenschaft. Da die aus der Umsetzung der chemisch gebundenen Energie des Treibmittels geweckten Kräfte nicht nur die Nutzarbeit der Beschleunigung des Geschosses leisten, sondern auch das Rohr oder den Lauf beanspruchen, so müssen wir uns auch mit diesen unerwünschten Nebenwirkungen beschäftigen. In den Selbstladewaffen und Rohrrücklaufgeschützen wird die Energie der Pulvergase zum Teil zur Betätigung der zum Dauer- oder Schnellschießen nötigen Mechanismen mitbenutzt; ihre Wirkungsweise ist mit dem Ablauf des Gasdruckes während der Schußentwicklung verbunden, es treten also auch diese Vorgänge in den Bereich unserer Wissenschaft im engeren Sinne.

Das schnelle Freiwerden der chemischen Energie in den Treibstoffen unserer Feuerwaffen ist nicht die einzige Art zur Auslösung gewaltiger Kräfte aus chemischen Substanzen, die in der Wehrtechnik zur Anwendung kommt. In den Sprengstoffen z. B. haben wir eine andere Anwendungsart chemisch gebundener Energie vor uns. Es ist üblich, auch die Vorgänge bei der Detonation von Sprengstoffen in den Lehrbüchern der inneren Ballistik zu behandeln. In einem gewissen Umfang behalten auch wir uns dies vor, soweit es sich um eine allgemeine Anschauung dieser Vorgänge und die Aufklärung des dabei vorhandenen Kräftespiels handelt.

Wie alle technischen Wissenschaften hat auch die innere Ballistik ein praktisches Ziel, nämlich die Erlangung einer derartig ausgiebigen Kenntnis der in Betracht kommenden Vorgänge, daß wir ihren Ablauf unter vorgegebenen oder angenommenen Bedingungen vorausberechnen können, um Einrichtungen der Feuerwaffen für bestimmte Verwendungen zu schaffen. Es wird heute häufig darauf hingewiesen, daß die Forschung nicht zweckgerichtet sein darf, daß sie mit einer praktischen Uninteressiertheit nur nach Erkenntnis des wahren Sachverhalts ihres Gegenstandes streben muß. Das ist gewiß richtig, insofern auch bei den technischen Wissenschaften bestimmte, durch praktische Ziele bedingte Voreingenommenheit häufig gerade das praktische Ziel verfehlen läßt, und wir dürfen uns bei einzelnen Untersuchungen nicht von solchen Voreingenommenheiten leiten



lassen. Aber das allgemeine Ziel, zu einer möglichst sicheren Vorausberechnung der Vorgänge zu gelangen, dürfen wir in den exakten Wissenschaften und noch mehr in einer technischen Wissenschaft nie aus dem Auge verlieren, denn das gibt auch der inneren Ballistik erst eine straffe Organisation. Es lehrt uns, Wichtiges von zunächst weniger Wichtigem zu unterscheiden und uns nicht ins Uferlose zu verlieren. In diesem Sinne hat Charbonnier den Gegenstand der inneren Ballistik in das Hauptproblem und die sekundären Probleme geteilt. Als das Hauptproblem bezeichnen wir folgendes: Aus den gegebenen Bedingungen des Treibmittels, des Geschosses und der Waffe soll der Gasdruckverlauf und der Verlauf der Geschößgeschwindigkeit im Rohr vorausberechnet werden. Die sekundären Probleme würden sich dann auf die Bewegung der Pulvergase, die elastischen Deformationen des Rohres, die Beanspruchung des Geschosses in den Zügen, die Erwärmung des Rohres und die Vorgänge in dem Mechanismus der Waffe, und die Beanspruchung der Lafette beziehen.

Die vollständige Beherrschung des Hauptproblems ist auch heute noch nicht gelungen. Die Dinge liegen hier teils schwieriger, teils aber auch einfacher als in der äußeren Ballistik; schwieriger, weil neben rein mechanischen Vorgängen auch thermochemische und thermodynamische Vorgänge in Betracht kommen; einfacher, weil die Richtung der Geschößbewegung von vornherein festliegt und die Bewegung im wesentlichen eindimensional ist. Wenn aber gesagt worden ist, daß die innere Ballistik sich zur Zeit noch mehr in den Anfängen ihrer Entwicklung befände als die äußere Ballistik, so trifft dies vielleicht zu, wenn man die Erkenntnis der Gesamtheit aller in Betracht kommenden Vorgänge in beiden Gebieten der ballistischen Wissenschaft ins Auge faßt, nicht aber, was die Vorausberechnung von Gasdruck und Geschwindigkeit betrifft. Hier sind immerhin sowohl empirische wie theoretische Ansätze vorhanden, die für viele Zwecke der Praxis zur rechnerischen Behandlung des Hauptproblems genügen.

Auf die Geschichte unserer Wissenschaft will ich nur ganz kurz eingehen. Die Arbeiten, die auch heute noch von Wichtigkeit sind, werden bei der Behandlung des betreffenden Gegenstandes genauer besprochen.

Obwohl die Einführung der Feuerwaffen schon gegen Ende des 13. Jahrhunderts begann, dauerte es über 400 Jahre, bis eine wissenschaftliche Behandlung der Vorgänge in den Feuerwaffen begann. Im Jahre 1738 erschien eine Abhandlung von Daniel Bernouilli<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Daniel Bernouilli, *Traité d'Hydrodynamique*. Straßburg 1738.

in welcher er mit Hilfe des Boyle-Mariotteschen Gesetzes über die Ausdehnung der Gase die Geschößbewegung zu berechnen versuchte. Diesem primitiven Ansatz schloß sich auch vier Jahre später Robins<sup>2)</sup> in seinem in London erschienenen Buch an. Dieses Buch ist besonders für die Entwicklung der „inneren Ballistik“ von Bedeutung durch die Anmerkungen, mit welchen später der große Mathematiker Leonhard Euler eine von ihm verfaßte deutsche Übersetzung des Buches versah. Euler bekämpfte hier bereits die Annahme einer plötzlichen Vergasung des Pulvers wie

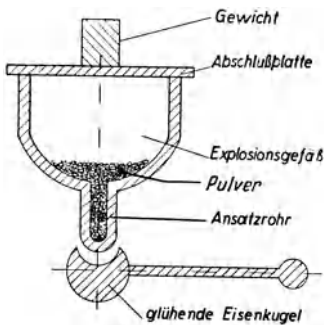


Abb. 1. Rumfordsche Druckmeßeinrichtung

auch die einer verhältnismäßigen Beziehung zwischen Druck und Dichte der Pulvergase. Zu einer wirklich fruchtbaren Behandlung der Vorgänge im Geschützrohr oder Gewehrlauf fehlten den genannten Forschern vor allen Dingen die einfachsten Kenntnisse über die Größe der vom Schwarzpulver erzeugten Drucke. Selbst über den Wert der Mündungsgeschwindigkeiten, die in damaligen Geschützen erreicht wurden, bestanden noch wenig bestimmte Kenntnisse.

Die ersten Versuche einer experimentellen Bestimmung gehen auf dasselbe Jahr 1738 des ersten theoretischen Versuchs von Bernouilli zurück. Der Italiener Chevalier d'Antony begann die vom Pulver ausgeübten Druckkräfte zu bestimmen. Bei den Versuchen war das Pulver in einem geschlossenen Raum enthalten, der zum Zwecke der Zündung durch einen engen Kanal mit der Außenluft in Verbindung stand. Erst wesentlich später, im Jahre 1797, veröffentlichte Graf Rumford<sup>3)</sup> seine in der Geschützgießerei in München 1792 begonnenen Versuche zur Bestimmung der vom Schwarzpulver erzeugten Drucke, bei denen er den Mangel der Versuche d'Antonys vermied. Er versah das geschlossene Explosionsgefäß mit einem geschlossenen mit Pulver gefüllten Ansatzrohr. Dieses wurde mittels eines Hebels mit einer entsprechend ausgebohrten glühenden Eisenkugel in Berührung gebracht und so dem Pulver durch Wärmeleitung die zur Zündung nötige Wärmemenge zugeführt. Der Druck wurde durch Heben von Gewichten bestimmt, in dem für jede Last durch Probieren diejenige Ladung des Pulvers in der Bombe ermittelt wurde, welche eben ausreichte, die mit Ge-

<sup>2)</sup> Robins, Principes d'Artillerie. London 1742.

<sup>3)</sup> Graf Rumford, Phil. Transactions of Royal Society, 1797.

wichten belastete, das Explosionsgefäß gasdicht abschließende Platte zu bewegen.

Die sowohl für die Erforschung der Vorgänge im Rohr oder Lauf, wie auch für die äußere Ballistik so wichtige Mündungsgeschwindigkeit ist von Benjamin Robins gemessen worden; er nahm einen auf den Stoßgesetzen beruhenden, schon 1707 von Cassini jun. geäußerten Gedanken auf und schuf in dem ballistischen Pendel, allerdings nur für Flintenkugeln, einen Apparat zur Bestimmung der Geschößgeschwindigkeit. Erst Hutton stellte von 1775 bis 1780 Versuche an, die Geschwindigkeit auch von Kanonenkugeln zu messen. In vervollkommneter Form wurde es noch bis in das Jahr 1836 hinein für ballistische Versuche gebraucht. Eine Metzger Kommission für ballistische Versuche, unter Führung Didion, Morin und Piobert verwandte ein Pendel, das Sand oder auch Bleimassen bis zu 6000 kp enthielt. Erst im Jahre 1857 wurde von Le Boulengé ein für schnelle und zahlreiche Messungen der Geschößgeschwindigkeit brauchbarer elektromagnetischer Fallapparat, der Chronograph Le Boulengé angegeben (s. S. 32), und so die Präzisionsmessung der Mündungsgeschwindigkeit in zahlreichen Fällen ermöglicht.

Zur Messung der Drucke im Geschütz war man noch lange Zeit auf umständliche und mittelbare Methoden angewiesen. Chevalier d'Arcy in Frankreich maß (1760) mit dem ballistischen Pendel die Geschößgeschwindigkeiten für mehr und mehr verkürzte Rohre und leitete daraus Vorstellungen über den Gasdruckverlauf ab. Diese Methode ist sehr wichtig, worauf wir später noch zurückkommen werden. Verwandt damit ist die wesentlich später in die experimentelle Ballistik eingeführte Methode der Seitenstollen. Der italienische Oberst Cavalli stellte 1845 Versuche an, indem er das Geschütz an elf verschiedenen Stellen mit ein bis zwei Kaliberlängen Abstand voneinander anbohrte. An diese Bohrungen waren Flintenläufe angesetzt, aus denen unter Wirkung des beim Schuß an diesen Stellen vorhandenen Gasdruckes im Geschützrohr 46 p schwere Geschosse herausgeschleudert wurden. Aus ihrer mit dem ballistischen Pendel gemessenen Geschwindigkeit konnten Rückschlüsse über die Werte des Gasdruckes an verschiedenen Stellen des Rohres gezogen werden. Der spätere General Neumann in Preußen führte 1851 ähnliche Versuche unter Variation der Laderäume und für verschiedene Gewichte der herausgeschleuderten Hilfgeschosse aus, die immerhin für damalige Verhältnisse einen wichtigen Einblick in den Einfluß verschiedener Ladebedingungen gewährten. In seinen 1860 wieder aufgenommenen Versuchen konnte Cavalli zeigen,

daß man bei gleichem Verhältnis der Pulverladung zum anfänglichen Laderaum bei gezogenen Geschützen zu keineswegs abnormen Gasdrucken gelangte, und so eine Befürchtung zerstreuen, welche vielfach noch hemmend auf die Einführung gezogener Hinterlader gewirkt hatte. Erst in den Jahren 1857 bis 1862 wurden diejenigen Methoden ausgearbeitet, welche zu einer sicheren Beurteilung, wenigstens des Höchstdruckes, beim Schuß im Rohr führten, ohne daß umständliche Anbohrungen des Rohres nötig wurden und die sich an die Namen Uchatins, Rodmann und Noble knüpfen, so die Messung des Druckes aus der Eindringung eines Meißels (Stempel) in eine Kupferplatte und mittels Stauchzylinder. Von diesen Apparaten hat sich die Noblesche Stauchzylindermethode, auf die wir später noch eingehend zurückkommen werden, als die praktisch allein brauchbare und zuverlässige erwiesen.

In diesem mehr als hundert Jahre umfassenden Zeitraum, dessen es bedurft hatte, um der inneren Ballistik die beiden wichtigsten Bestimmungsstücke, den Höchstdruck und die Mündungsgeschwindigkeit zu liefern, hatte sich die Anschauung von den Vorgängen im Rohr nicht schneller entwickelt.

Kein Geringerer als Lagrange behandelte 1793 die Bewegung eines reibungslosen Stempels in einem Rohr unter Entspannung einer anfänglich unter hohem Druck stehenden Gasmasse<sup>4)</sup>. Seine Arbeit hatte zunächst deshalb keine die innere Ballistik fördernde Bedeutung, weil er vollkommene Vergasung vor der Stempelbewegung voraussetzen mußte.

Über die Art der Vergasung als einer allmählichen hatte erst Piobert sich bestimmtere Vorstellungen zu machen gesucht, indem er Versuche über die Abhängigkeit der Verbrennung des Pulvers von der Form der Pulverkörper anstellte. Arago und Poucelet legten 1836 seine diesbezüglichen Arbeiten der Académie Française vor. Seine endgültigen Anschauungen hat er in der zweiten Auflage seiner 1869 erschienenen Abhandlung<sup>5)</sup> niedergelegt. Die Abhängigkeit der Verbrennungsgeschwindigkeit vom Druck ist darin nicht berücksichtigt.

Auch die im Jahre 1864 erschienene Schrift von Rézal<sup>6)</sup>, welche vom Energieprinzip ausgehend eine der Grundgleichungen der Geschößbewegung aufstellte, die auch in den Entwicklungen der Neuzeit

---

<sup>4)</sup> Journ. d. l'École Polytechnique **13**, 1832, Nr. 21 und Lagrange, Ges. Werke **7**, 603 (von Poissons veröffentlicht).

<sup>5)</sup> Piobert, *Traité de l'Artillerie théorique et pratique*, 1869.

<sup>6)</sup> Rézal, *Recherches sur le mouvement des projectiles dans les armes à feu*, 1864.

ein unverrückbares Fundament bildet, konnte wegen der Unvollkommenheit der übrigen Annahmen keine praktisch wertvolle Lösung des Hauptproblems der inneren Ballistik, die Berechnung der Geschößbewegung aus den Anfangsbedingungen, bringen.

Erst 1876 wurden von Sarrau<sup>7)</sup> in einer Arbeit die Grundgleichungen des Hauptproblems der inneren Ballistik unter Berücksichtigung der während der Geschößbewegung sich vollziehenden Vergasung des Treibmittels in ihrer Abhängigkeit von der Form und vom Druck aufgestellt. Es gelang ihm, für die damaligen Schwarzpulversorten recht genau zutreffende Formeln für die Berechnung der Mündungsgeschwindigkeit und des Höchstdruckes aus den Bedingungen der Ladung und der Waffe zu berechnen. Auch die von Moisson<sup>8)</sup> in seinem 1887 in Paris erschienenen Buch entwickelte Theorie führte zu praktisch brauchbaren Formeln für Schwarzpulver, allerdings schon zu einer Zeit, als seine endgültige Verdrängung als Treibmittel aus seiner 500jährigen Herrschaft durch die Herstellung des ersten kriegsbrauchbaren Nitrozellulosepulvers durch Vieille im Jahre 1884 schon eingesetzt hatte. Vieille ist der erste, der in seiner Registrierbombe planmäßige Versuche über die Verbrennungsweise der Treibmittel ausgeführt hat, die für unsere Wissenschaft von grundlegender Bedeutung ist.

Hiermit stehen wir an der Schwelle der neuzeitlichen Entwicklung zugleich der Feuerwaffen wie auch unserer Wissenschaft von der Wirkungsweise des „Pulvers“ in ihnen, wie man die Treibmittel in Anlehnung an das alte Schwarzpulver noch heute vielfach zu nennen pflegt.

Bevor wir die innere Ballistik der Waffen näher behandeln, möchte ich noch ein allgemeines Wort über die Feuerwaffen sagen. Von ausschlaggebender Bedeutung ist die Angabe des Kalibers einer Waffe oder der Querschnitt des zu verfeuernden Geschosses. Die Waffen mit einem Kaliber von 2 cm und darüber pflegen wir gewöhnlich als Geschütze zu bezeichnen, bei denen man wieder je nach der Rohrlänge und Bauart Kanonen, Haubitzen und Mörser unterscheidet. Die Waffen unter 2 cm werden unter dem Begriff Handfeuerwaffen zusammengefaßt; man unterscheidet hierbei Langwaffen und Kurz- oder Faustfeuerwaffen. Bei den Langwaffen wiederum gibt es zwei große Gruppen, die Büchsen und die Flinten. Die Büchsen besitzen einen gezogenen Lauf, aus ihnen werden Geschosse (Kugeln) verfeuert, während die Flinten einen glatten Lauf

<sup>7)</sup> Sarrau, Nouvelles recherches sur les effets de la poudre dans les armes. Mém. de l'Artillerie de la Marine 1876.

<sup>8)</sup> Moisson, Pyrodynamique. Paris 1887.

besitzen, aus dem Schrote und höchstens spezielle Flintenlaufgeschosse verfeuert werden. Zu den Kurz- oder Faustfeuerwaffen gehören die Revolver und Pistolen.

Es ist üblich, eine Handfeuerwaffe durch die Angabe der Dimension der dazugehörigen Patrone zu kennzeichnen. Die Patrone wird durch zwei Zahlenangaben und gegebenenfalls noch einen Buchstaben, z. B.  $8 \times 57$  und  $9,3 \times 74$  R bezeichnet. Die erste Zahl gibt das Kaliber des Geschosses an, so in obigem Beispiel 8 bzw. 9,3 mm;

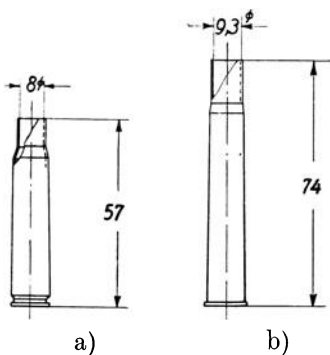


Abb. 2. Patronenhülsen a)  $8 \times 57$ ,  
b)  $9,3 \times 74$  R (mit Rand)

die zweite Zahl bestimmt die Länge der Patronenhülse (57 bzw. 74 mm). Der Buchstabe „R“ bedeutet, daß es sich hier um eine Patrone mit Rand handelt. Durch die Angabe des Kalibers und der Länge der Patronenhülse ist nach einer allgemeinen Vereinbarung auch die Form der Patrone sowie der Inhalt und damit der ursprüngliche Verbrennungsraum bestimmt. Bei den Flinten oder Schrotgewehren ist die Kaliberbezeichnung etwas anders, sie gibt die Zahl der Schrotkugeln vom Durchmesser des

Flintenlaufes an, die auf ein englisches Pfund (453,6 g) gehen. Bei Kal. 12, das einen Durchmesser von 18,2 mm hat, wiegen 12 Schrotkugeln 453,6 g. Es ist demnach bei den Flinten so, daß dem größten Kaliber (Kal. 32) der kleinste Durchmesser (12,7 mm) entspricht.

Bei den Jagdwaffen werden vielfach mehrere Läufe vereinigt. So gibt es u. a. Doppelflinten und -büchsen, das sind Waffen mit zwei Flinten- bzw. Büchsläufen, Büchsfinten mit einem Kugel- und einem Schrotlauf, Drillinge mit zwei Flintenläufen und einem Büchslauf. Es gibt die mannigfachste Art der Laufkombination.

Für die meisten Kaliber gibt es automatische Waffen, bei denen das Laden und Spannen des Schlosses durch den Druck der Pulvergase erfolgt (Maschinenpistolen, Maschinengewehre und Schnellfeuergeschütze).

Wir wollen uns jetzt zunächst ein allgemeines Bild von den Vorgängen in der Waffe beim Schuß verschaffen.

Wenn durch die Flamme des Zündhütchens das Treibmittel gezündet ist, breitet sich die Flamme, wie wir später noch eingehender sehen werden, in sehr kurzer Zeit über die Oberfläche des Treibmittels aus und es beginnt die Umsetzung des Treibmittels in hochoberhitze Gase, der Druck steigt an und mit ihm, was sehr wichtig ist, die

Verbrennungsgeschwindigkeit des Pulvers. Das Geschoß setzt sich unter der Wirkung des Gasdruckes bei Gewehren und Waffen mit Patronenmunition, wo der anfängliche Widerstand in der Hülse verhältnismäßig gering ist, sehr bald in Bewegung, bis es an die Züge ansetzt, während bei der Artilleriemunition das Geschoß meist von vornherein angesetzt wird und sich erst bei einem bestimmten Druck, also nach Verbrennung eines gewissen Bruchteiles der Ladung in Bewegung setzt. Im ersten Falle ist der Druck bereits hoch genug, um das Geschoß beim Einschneiden der Züge ohne Aufenthalt gegen den ansteigenden Widerstand zu beschleunigen. Aber auch im zweiten Falle setzt infolge des schnell wachsenden Druckes trotz des anfangs noch ansteigenden Widerstandes die Bewegung beschleunigt ein. Die Beschleunigung wächst in dem Maße, wie sich der Druck steigert und mit diesem wächst auch

weiter die Geschwindigkeit der Gasentwicklung. Da jetzt aber die Geschwindigkeit des Geschosses wächst und mit ihr der Gasraum sich immer schneller vergrößert, so überwiegt der Einfluß der Volumenvergrößerung von einer be-

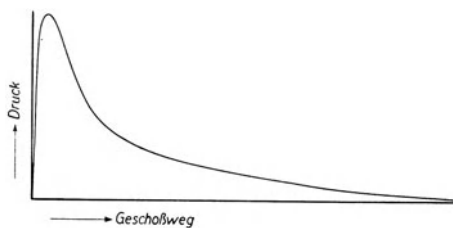


Abb. 3. Druck-Wegdiagramm bei einem 8mm-Gewehr

stimmten Stelle an dem der Neubildung von Gasen; der Druck beginnt abzusinken, bleibt aber immer noch groß genug, um das Geschoß gegen die Reibungswiderstände zu beschleunigen, so daß es den Lauf mit der höchsten Geschwindigkeit verläßt. Es muß also im allgemeinen der Gasdruck bis zu einem Maximum ansteigen und dann abfallen. Die Stelle, an welcher sich beim Eintritt dieses Höchstdruckes das Geschoß befindet, hängt von der Verbrennungsgeschwindigkeit ab. Aus dieser Darstellung des Vorgangs geht hervor, daß an dieser Stelle durchaus noch keine vollständige Verbrennung des Pulvers eingetreten zu sein braucht. Für den Fall eines 8 mm-Gewehres mit 10 p Geschoßgewicht haben wir den in Abb. 3 dargestellten Gasdruckverlauf.

Nach diesem allgemeinen Überblick über den Gegenstand der inneren Ballistik wollen wir uns jetzt mit den grundsätzlichen Methoden vertraut machen, die uns die experimentellen Grundlagen für die innere Ballistik zu gewinnen gestatten.

## II. Meßmethoden der inneren Ballistik

### 1. Gasdruckmessung mit dem Stauchzylinder

a) Allgemeines. Die Gasdruckmessung mit dem Stauchzylinder beruht darauf, daß man den Druck  $P$  über einen Stempel vom Querschnitt  $q$  auf den Stauchzylinder einwirken läßt, der durch die Kraft  $K = Pq$  eine Stauchung erfährt; diese Stauchung ist dann ihrerseits ein Maß für den Gasdruck, im besonderen ist die bleibende Stauchung ein Maß für den Höchstgasdruck. Die Stauchzylinder werden meistens aus Kupfer hergestellt, verschiedentlich, vor allem in England, werden auch Stauchzylinder aus Blei verwendet. Die Maße der Zylinder sind normalisiert und international. Die hauptsächlichsten Typen sind:  $3 \times 4,9$  bzw.  $3 \times 5$ ,  $5 \times 6$ ,  $5 \times 7$  und  $10 \times 15$ , wobei die erste Zahl den Durchmesser und die zweite Zahl die Höhe angibt; in Frankreich werden noch die Zylinder  $8 \times 13$  verwendet; alle Zahlen in mm gerechnet.

Zur Aufstellung der Eich Tabellen für die Stauchzylinder werden die Stauchkörper statisch belastet und die dabei auftretende bleibende Stauchung festgestellt. Die Belastung muß stetig erfolgen und dauert 30 Sekunden. Die Belastungswerte werden so gewählt, daß sich mit Hilfe der gemessenen Werte eine glatte Belastungs-Stauchungskurve zeichnen läßt. Aus dieser Kurve werden bei der Aufstellung der Stauch Tabellen die auf dem gewünschten Stempelquerschnitt umgerechneten Druckwerte von  $1/10$  zu  $1/10$  mm abgelesen und die Zwischenwerte interpoliert.

Der aus der bleibenden Stauchung des Stauchzylinders ermittelte Höchstdruck beim Schuß ist natürlich nur ein rein konventioneller Wert, und es bleibt die Frage offen, wie hoch der Maximaldruck nun wirklich im absoluten Maße war, wenn beim Schuß der Stauchzylinder eine bestimmte Stauchung erhalten hat.

b) Meßei. Zunächst einiges über die Messung des Höchstdruckes und den Gasdruckverlauf in den Waffen. Für die Gasdruckmessung in Geschützen haben wir das Meßei.

Über den Stempel, der im Oberteil des Meßeies geführt wird, wirkt der Druck auf den Stauchzylinder. Um ein Verrücken des Stauchzylinders zu verhindern, wird er durch einen Führungsring festgelegt. Zur Bestimmung des Gasdruckes im Geschütz wird das



Meßei exzentrisch auf dem Boden der Kartuschhülse angebracht, wobei der den Stempel führende Oberteil der Geschütz­mündung zugekehrt ist. Besteht die Treibladung aus einem Bündel von Röhren oder Streifen, so drückt man vor Einsetzen des Bündels das Meßei in der beschriebenen Lage in das Bündel ein, bricht die dadurch überstehenden Teile der Ladung ab, und fügt sie lose der Ladung zu.

Die Anwendung des Meßeies ist also technisch sehr einfach, zumal wenn man kleine Meßeier benutzt, die die Anordnung der Ladung nur wenig beeinflussen. Dies zeigt sich auch dadurch, daß die Mündungsgeschwindigkeit mit und ohne Meßei im Mittel keine merkliche und systematische Abweichung zeigt. Es hat den Vorteil, daß die Gasdruckmessung kein besonders dafür vorbereitetes Geschütz erfordert. Man kann

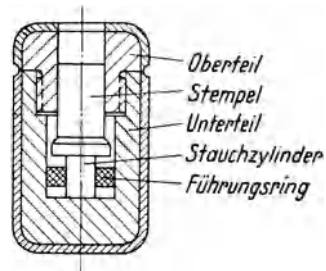


Abb. 4. Meßei

auch leicht gleichzeitig zwei oder noch mehr Meßeier bei jedem Schuß anwenden und so die relative Genauigkeit ihrer Angaben miteinander vergleichen.

c) Gasdruckmessung bei Handfeuerwaffen. Erheblich schwieriger gestaltet sich die Messung des Gasdruckes mittels Stauchzylinder in den Handfeuerwaffen. Hier muß man eine besonders für die Gasdruckmessung hergerichtete Waffe verwenden.

Bei dem älteren Gewehr­gasdruckmesser (Abb. 5) ist der Lauf in einen Stahlblock fest eingeschraubt. Lauf und Block besitzen eine zylindrische, gut ausgeschliffene Bohrung für den Stempel. Der Druck der Pulvergase wirkt über den Stempel auf den Stauchzylinder, der durch die als Widerlager dienende Verschlußschraube festgelegt ist. Entsprechend dem ausgeübten Höchst­druck erhält der Stauchzylinder eine permanente Deformation, aus deren Größen auf den Gasdruck geschlossen wird. Die Bohrung für den Stempel sitzt gewöhnlich im Patronenlager des Laufes. Die in das Lager eingeführte Patronenhülse besitzt ein entsprechendes Loch vom Durchmesser des Stempels, das nach dem Laden der Patrone der entsprechend geformten Endfläche des Stempels gegenüberstehen muß. Damit sie diese richtige Lage nach dem Laden einnimmt, ist an dem Rand der Patronenhülse ein Ausschnitt angebracht, mit welchem sie in eine entsprechende Nase des Verschlußkopfes des Schlosses eingreift. Der Gasdruck kann auch vor der Hülse zur Vermeidung der Anbohrung gemessen werden. Jedoch wird die Druckmessung

stark verfälscht, da hier der Gasdruck plötzlich von Null auf den augenblicklichen Wert ansteigt (siehe später).

In neuerer Zeit ist man zunächst für Schrotflinten und seit zwei Jahrzehnten auch für gezogene Gewehre zu einer anderen Einrichtung übergegangen (Abb. 6). Mit dem Lauf ist ein Block (am besten warm aufgezogen) fest verbunden. Der Lauf besitzt eine konische Bohrung, in welche ein Stahlkonus durch die in den Block eingeschraubte Druckschraube fest eingepreßt wird. Der Konus besitzt die Bohrung für den kleinen Stempel (3,91 mm), der nicht ganz bis zum Ende der

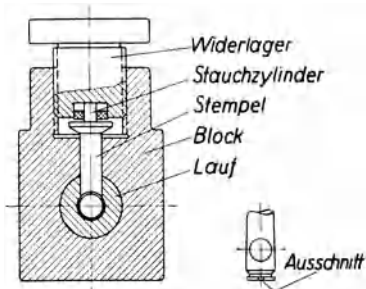


Abb. 5. Älterer Gewehrdruckmesser

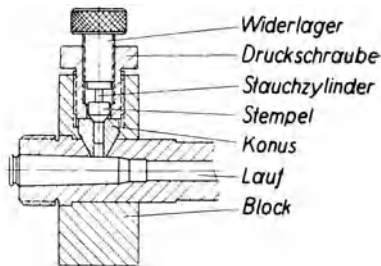


Abb. 6. Böttcher'scher Büchsen-gasdruckmesser

Bohrung hinunterreicht. Das Ende der Bohrung steht im Patronenlager des Laufs einem entsprechenden Loch in der Patronenhülse gegenüber. Durch dieses Loch (etwa 2,5 mm Durchmesser) wirkt der Druck der Pulvergase beim Schuß über eine im unteren Teil der Bohrung angebrachte geeignete Fettfüllung auf den Stempel und hierdurch auf den sich gegen die untere Endfläche einer Widerlagerschraube stützenden Stauchzylinder. Man verwendet hierbei kleine Stempel und kleinere Stauchzylinder als bei dem älteren Gasdruckgewehr.

Die Läufe der Gasdruckmesser sind, abgesehen von der Anbohrung, denen der normalen Gewehre gleich, d. h. das Patronenlager, der Übergangskonus, das Kaliber und die Züge entsprechen den Normen. Das Lästige an dieser Gasdruckmessung ist, daß man für jede Patronenform einen entsprechenden Gasdruckmesser bauen muß, ferner kann durch die Anbohrung der Patrone der Gasdruckverlauf und die Mündungsgeschwindigkeit von der im normalen Gewehr mehr oder weniger verschieden sein. Wie weit dies der Fall ist und wie groß der Unterschied ist, kann man dadurch beurteilen, daß man mit derselben Munition die Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses im Gewehr und Gasdruckmesser bestimmt.

d) Abweichung des mit dem Stauchzylinder gemessenen Druckes vom absoluten Druck. *Experimentelle Untersuchungen*. Wir haben bis jetzt kurz die Stauchungsmethode zur Ermittlung des höchsten Gasdruckes beim Schuß im Geschütz mit dem Meßei und für Gewehre in besonderen dazu eingerichteten Gasdruckgewehren besprochen. Wir haben dabei erörtert, daß durch diese Methode nicht der absolute Wert des Höchstdruckes erhalten werden kann und daß man den Fehler durch Vergleich der Stauchungsmessung mit einer absoluten Meßmethode, z. B. der piezoelektrischen,

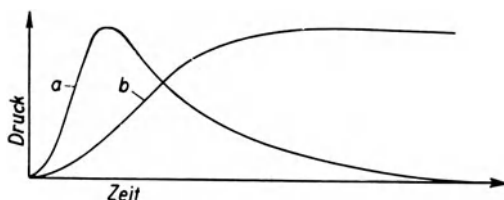


Abb. 7. Druck-Zeitdiagramm.

a) Druckverlauf beim Schuß, b) Druckverlauf in der Verbrennungsbombe

ermitteln muß. W. Kellner und W. H. Deering<sup>9)</sup> haben den Höchstdruck, den eine bestimmte Pulverladung in der Bombe ausübt, zugleich durch Heben von Gewichten und durch Stauchung eines Kupferzylinders gemessen. Die so ermittelten Korrekturen der Stauchmethode können aber offenbar immer nur für einen bestimmten Typ von Kupferzylinder und Stempelquerschnitt und dem bestimmten Druckverlauf in der Bombe gelten, denn beim Schuß bleibt der Druck nach Erreichung des Druckmaximums ja nicht konstant, wie aus Abb. 7 zu ersehen ist.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung der Abweichungen der Stauchungsmessung von den wirklichen Drucken in einem besonderen Fall zu geben, will ich die Ergebnisse einer solchen Messung für Kupferzylinder  $10 \times 15$  anführen:

Tabelle 1

Druck:	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2400	2600	2800	3000
Abweichung . . . . .	25	40	60	80	105	130	190	225	370	335

Man hat, um dem Umstand, daß bei einem schnellen Druckverlauf eine andere Stauchung als bei einem 30 Sekunden lang anhaltenden Druck erfolgt, Rechnung zu tragen, eine andere Art der Eichung,

<sup>9)</sup> W. Kellner u. W. H. Deering, Proc. of Roy. Soc. **57**, 404, 1895.

nämlich diejenige durch einen Fallhammer vorgeschlagen, bei der man ein schweres Gewicht auf den Stauchzylinder fallen läßt. Man muß hierbei aber die Erwärmung des Stauchzylinders und ein etwaiges elastisches Abprallen des Gewichtes berücksichtigen. Bei der Fallhammermethode erhält man zunächst nur eine Tabelle, die die Stauchung als Funktion der auf den Zylinder übertragenen Energie darstellt. Eine Beziehung zu den wirkenden Druckkräften erhält man durch folgende Überlegung: Entspricht der umgesetzten Fallenergie  $E$  die Stauchung  $S$ , der Energie  $E + \Delta E$  die Stauchung  $S + \Delta S$  und ist  $R$  der Widerstand, den der Stauchungszyylinder von dem Augenblick, wo er um  $S$  gestaucht war, bis zu dem Augenblick, wo er um  $S + \Delta S$  gestaucht wird, der Verformung entgegengesetzt, so entspricht der Formänderungsarbeit  $R \Delta S$  die Energie  $\Delta E$ , also

$$\Delta E = R \Delta S \quad \text{und} \quad R = \frac{\Delta E}{\Delta S}.$$

Hat man also aus den Versuchen für verschiedene Fallhöhen und Stauchungen die Funktion  $E = f(S)$  ermittelt, so erhält man die Drucktabelle aus der Differentiation der Funktion  $f(S)$ .

Aber auch bei dieser Eichung, welche zum Teil in Frankreich eingeführt wurde, ist das Kräftespiel ein anderes wie beim Schuß, hier ist auch eine besondere Untersuchung über das Verhältnis der wahren Drucke zu den aus der Fallhammereichung ermittelten notwendig, die in wirklich systematischer Weise trotz mancher Ansätze bis heute noch nicht durchgeführt ist<sup>10)</sup>. Die bei der Eichung der Stauchkörper anzubringenden Korrekturen sind Gegenstand zahlreicher Arbeiten gewesen. Unter den älteren führe ich wegen der Wichtigkeit des Verfahrens zunächst diejenigen von Heydenreich<sup>11)</sup> an. Diese beruhen auf der gleichzeitigen Aufzeichnung der Rücklaufbewegung des im Schlitten frei zurückgleitenden Rohres, des Rücklaufmessers, den wir noch ausführlich besprechen werden, bei gleichzeitiger Messung des Höchstdruckes durch ein Meßei. Aus der aufgezeichneten Zeit-Weg-Kurve des Geschützes erhält man die Beschleunigung des Rohres, und damit die auf das Rohr ausgeübte Kraft.

Diese Kraft wäre gleich dem auf den Rohrboden wirkenden Druck, wenn keine Reibung zwischen Geschosß und Rohr bestände. Nun sind, wie wir später noch erörtern wollen, die in Druckverlusten

<sup>10)</sup> B. W. Höniger, Dissertation TH. Berlin 1914; H. Seehase, Dissertation TH. Berlin 1914.

<sup>11)</sup> Heydenreich, Lehre vom Schuß. Berlin, Mittler u. Sohn, 1908.

ausgedrückten Reibungswiderstände bei Geschützen verhältnismäßig klein. Heydenreich hat deshalb die aus Rücklaufmessungen ermittelten Drucke als absolute Drucke angenommen und die Abweichungen der mit dem Stauchzylinder gemessenen Werte danach berechnet.

In nachstehender Tabelle 2 sind die von Heydenreich gefundenen Abweichungen angegeben.

Tabelle 2

Druck:	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2400	2600	2800	3000
Abweichung . . . . .	25	40	60	80	105	130	190	225	370	335

Natürlich gilt das auch nur für einen bestimmten Stauchzylindertyp und Stempelquerschnitt und eine bestimmte Verbrennungsgeschwindigkeit des Pulvers.

In neuerer Zeit sind zur Ermittlung des Verhältnisses zwischen den Ergebnissen der Stauchmethode und dem wahren Drucke nach einer ähnlichen Methode Versuche von Burlot<sup>12)</sup> ausgeführt worden.

Burlot wandte zur absoluten Druckregistrierung, ebenfalls wie beim Rücklaufmesser, die Aufzeichnung der Bewegung einer schweren Masse (Stempels) unter dem Druck der Pulvergase in einer

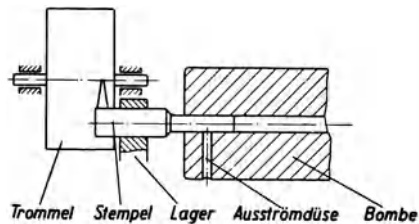


Abb. 8. Druckmessung nach Burlot (piston libre)

Bombe an, eine Druckmessung, die übrigens schon Sébert in den 90er Jahren des vorigen Jahrhunderts verwendet hatte. Burlot nennt seine Methode die des „piston libre“.

In einer Verbrennungsbombe ist das eine Ende durch einen schweren Stempel, der außerhalb der Bombe gelagert wird, abgeschlossen. Die Bewegung des Stempels wird auf die Trommel aufgezeichnet. Um dem Schuß ähnliche Bedingungen zu erhalten, ist eine Ausströmdüse angebracht und der Abstand des Stempelbodens von der Düsenöffnung so gewählt, daß die Gase nach Erreichung des Maximaldruckes abströmen können. In der nachstehenden Tabelle 3 sind für einen Kupferzylinder  $8 \times 13$  (s. S. 10) die zur jeweiligen Stauchung gehörenden Druckwerte und Abweichungen angegeben.

<sup>12)</sup> Burlot, Mém. des Poudres 3, 255–315, 1923.

Tabelle 3

Stauchung mm	Absoluter Druck in kp/cm <sup>2</sup>	Hebelpresse		Fallhammer
		Druckwerte	Abweichung vom absoluten Druck	Druckwerte
1,5	1220	1150	70	1390
2,0	1500	1400	100	1720
3,0	2040	1840	200	2330
4,0	2550	2270	280	2850
5,0	3030	2710	320	3320
6,0	3560	3290	270	—
6,5	3800	3650	150	—
7,0	4000	4000	0	—

Burlot hat die Untersuchung auch auf andere Stauchzylinderformen ausgedehnt. Aber eine systematische Auswertung seiner Versuche, die sich auf Kräfte und nicht auf Drucke beziehen müßte, steht noch aus.

Es fehlt den bisherigen experimentellen Arbeiten über die Bedeutung der Stauchungsmessung nicht an hinreichender Exaktheit der Methoden, sondern an ihrer systematischen Auswertung, die nicht Korrekturen bezüglich der wahren Drucke, sondern der Kräfte enthalten müssen und sich auch auf den Einfluß der Form der Druckkurve beziehen müssen.

*Theoretische Überlegungen.* Es ist auch auf theoretischem Wege versucht worden, die Frage zu lösen. Vieille, der als erster die Ver-

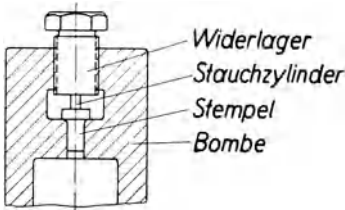


Abb. 9. Gasdruckmeßeinrichtung  
in der Verbrennungsbombe

brennungsweise des Pulvers in geschlossener Bombe mit Hilfe des Stauchvorganges untersucht hat, und der hiermit wesentlich neue Erkenntnisse gefördert hat, die zur Herstellung des ersten rauchlosen Pulvers geführt haben, hat auch in Gemeinschaft mit Sarrau dem Stauchungsvorgang ein eingehendes Studium gewidmet.

Ist  $m$  die Masse des Stempels,  $p q = f(t)$  beim Stempelquerschnitt  $q$  der zeitliche Druckverlauf und  $R$  der augenblickliche Wert der Gegenwirkung des Stauchzylinders, dann gilt  $m \frac{d^2 n}{dt^2} = f(t) - R$  für den augenblicklichen Wert der Stauchung. Vieille setzt  $R = K_0$

+  $K n$ , eine Annahme die für statische Belastung nicht gilt, da aber Vieille und Sarrau vor allem den Einfluß der Stauchträgheit im Auge haben, mag die Annahme  $R = K_0 + K n$  zunächst ausreichend sein.

Wir wollen annehmen, daß der Druck plötzlich von Null auf den Wert  $P$  springt, dann lautet unsere Gleichung

$$m \frac{d^2 n}{dt^2} + K n = P - K_0,$$

und wir erhalten als Lösung

$$n = \frac{P - K_0}{K} + A \cos at + B \sin at$$

mit  $a^2 = \frac{K}{m}$ .

Für  $t = 0$  ist nach unserer Voraussetzung  $n = 0$ , und  $\frac{dn}{dt} = 0$ ,

daraus ergibt sich  $A = -\frac{P - K_0}{K}$  und  $B = 0$  und somit wird

$$n = \frac{P - K_0}{K} (1 - \cos at).$$

$n$  erreicht sein Maximum für  $t = \frac{\pi}{a}$  bzw. für  $t = \tau_0 = \pi \sqrt{\frac{m}{K}}$ .

$\tau_0$  ist die Stauchungsdauer, ihr entspricht demnach die endliche Stauchung  $\varepsilon$

$$\varepsilon = 2 \frac{P - K_0}{K}$$

und daraus folgt

$$P = K_0 + K \varepsilon / 2.$$

Nach unserer Annahme über den Zusammenhang zwischen Kraft und Stauchung ( $R = K_0 + K n$ ) folgt aus der Lösung der Differentialgleichung, daß bei einer plötzlich auf einen Wert  $P$  ansteigenden Druckkraft die erhaltene Stauchung nur einem Druck entspricht, der aus der unter der Annahme  $P = K_0 + K \varepsilon$  aufgestellten Tabelle nur zur halben wirklich erreichten Stauchung gehört.

Der angenommene Fall hat eine gewisse praktische Bedeutung für Gewehrgasdruckmesser, bei denen man die Stauchungsvorrichtung nicht über der Patronenhülse, sondern vor der Patrone anbringt, wie sie mehrfach zur Vereinfachung der Gasdruckmessung vorgeschlagen und ausgeführt wurde (Abb. 10).

Wenn in dem Augenblick, in welchem das Geschöß die Bohrung für den Stempel passiert, bereits ein hoher, nicht sehr weit vom

Maximaldruck entfernter Druck herrscht, so kann man Stauchungen erhalten, die nahezu dem doppelten Wert der Stauchung des Maximaldruckes entsprechen. Ist dagegen der Druck noch klein, so wird

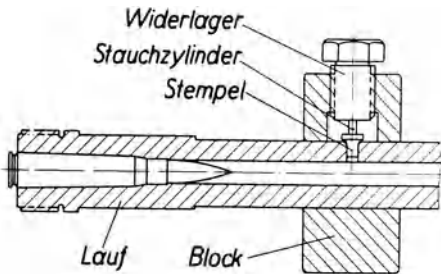


Abb. 10. Gasdruckmessung außerhalb des Patronenraums

der Fehler vermieden, man erhält jetzt aber zu kleine Stauchungen, weil die Zeit der Einwirkung des Druckes kürzer ist als beim Messen des Gasdruckes im Pulverraum, wo ja selbst schon zu niedrige Drucke gemessen werden. Man ist daher mit Recht von dieser Druckmessung abgekommen.

Für den allgemeinen Fall, in welchen der Druck mit kleinen Werten beginnend bis zum Maximum ansteigt, setzen nun Sarrau und Vieille

$$P = f(t) = Kn + (P - K_0) \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

wenn  $\tau$  die Dauer der Druckentwicklung bis zum Höchstdruck, also in der Bombe bis zur vollständigen Verbrennung des Pulvers bedeutet. Rechnet man die Zeit vom Beginn der Stauchung, wo also der Druck den Wert  $K_0$  erreicht hat, so ist  $\varphi_{(0)} = 0$  und  $\varphi_{(1)} = 1$ .

Die Bewegungsgleichung des Stempels lautet dann:

$$m \frac{d^2 n}{dt^2} + Kn = (P - K_0) \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

In der Bombe ist für  $t > \tau$   $f(t) = P_m$  konstant und gleich dem Höchstdruck.

Setzt man

$$n = \frac{P - K_0}{K} y, \quad \frac{t}{\tau} = x \quad \text{und} \quad \frac{K}{m} = a^2,$$

so geht die Differentialgleichung der Stempelbewegung über in:

$$\frac{1}{a^2 \tau^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \varphi(x).$$

$y$  ist eine rein numerische Funktion von  $x$  und dem Parameter  $a\tau$ ; also ist

$$n = \frac{P - K_0}{K} F\left(\frac{t}{\tau}, a\tau\right),$$



und somit

$$\frac{dn}{dt} = \frac{P - K_0}{K} F' \left( \frac{t}{\tau}, a\tau \right), \quad \text{wobei} \quad F' = \frac{\partial F}{\partial \frac{t}{\tau}}.$$

Die Bewegung hört auf, wenn  $\frac{dn}{dt} = 0$ , also  $F' \left( \frac{t}{\tau}, a\tau \right) = 0$ . Die Zeit für die Erreichung der Endstauchung  $\varepsilon$  ist eine Funktion von  $a\tau$  allein.

Man kann dann setzen:

$$\varepsilon = \frac{P - K_0}{K} (1 + \varrho),$$

wobei  $\varrho$  eine Funktion von  $a\tau$  allein ist. Nun hatten wir für  $\tau = 0$  und  $a\tau = 0$  gefunden:

$$\varepsilon = 2 \frac{P - K_0}{K}.$$

Es ist hierfür  $1 + \varrho = 2$  und daraus  $\varrho = 1$ . Für große Werte von  $\tau$  nähert sich nach der Voraussetzung  $P = K_0 + K\varepsilon$   $\varrho$  offenbar dem Wert 0. Für plötzlichen Druckanstieg war  $\tau_0 = \pi/\alpha$ , also kann man setzen

$$a\tau = \pi \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Die endgültige Stauchung für irgendeinen Druckverlauf in der Bombe  $\varepsilon = \frac{P - K_0}{K} (1 + \varrho)$  hängt demnach allein von  $a\tau$  bzw. von  $\tau/\tau_0$  ab.  $\varrho$  ist eine solche Funktion von  $\tau/\tau_0$ , daß sie für  $\tau/\tau_0 = 0$  den Wert  $\varrho = 1$  und für  $\tau/\tau_0 = \infty$  den Wert  $\varrho = 0$  annimmt und daher im allgemeinen zwischen 0 und 1 liegt. Es gilt dann die Beziehung:

$$P = K_0 + K\varepsilon \frac{1}{1 + \varrho}.$$

Der Druck würde also im allgemeinen der kleineren Stauchung  $\varepsilon \frac{1}{1 + \varrho}$  entsprechen. Dem widerspricht aber die Erfahrung. Aus Aufzeichnungen der Stauchkurven haben Sarrau und Vieille mit verschiedenen Stempelmassen  $m$  die Werte  $\tau/\tau_0$  ermittelt und somit die Grenzen festgestellt, innerhalb derer die Massenträgheit nicht mehr die Messungen der Verbrennungsdauer fälscht.

Bezüglich des von ihnen durch ihre Annahme ganz außer acht gelassenen Einflusses der Zeit auf die Stauchung kann ihre Theorie aber nichts aussagen.

Cranz schlägt vor  $R = K_0 + Kn + \varphi \frac{dn}{dt}$  zu setzen und  $\varphi$  aus der Gleichung  $m \frac{d^2 n}{dt^2} + \varphi \frac{dn}{dt} + Kn + K_0 = P = f(t)$  zu bestimmen, wenn  $f(t)$  aus absoluter Druckregistrierung ermittelt wird.

Ferner weise ich noch auf die Arbeiten von Charpy<sup>13)</sup>, Charbonnier<sup>14)</sup> und Lamothe<sup>15)</sup> hin.

e) Messung des Druckverlaufs. Nachdem wir uns über die Messung der Drucke in den Waffen ein Bild verschafft haben, behandeln wir die Mittel, die uns gestatten, den zeitlichen Ablauf des

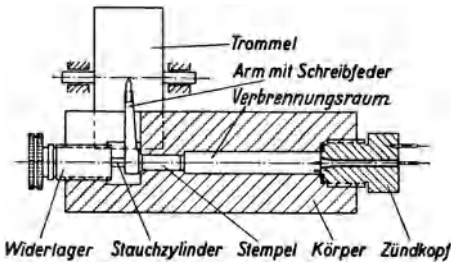


Abb. 11. Vieillesche Verbrennungsbombe

Druckes beim Verbrennen der Treibmittel in der Bombe zu ermitteln. Vieille war der erste, der die Verbrennungsweise der Treibmittel in der Bombe systematisch untersucht hat und die Gesetze der Pulververbrennung aufstellte.

Die Methode von Vieille war folgende: Das Pulver wird in einem Stahlrohr (Verbrennungsbombe, Abb. 11) verbrannt, das auf der einen Seite durch den Zündkopf, der eine isolierte Durchführung besitzt, und auf der anderen Seite durch den Stempel abgeschlossen ist. Der Stempel hat einen seitlichen Arm, der eine Stahlfeder trägt. Die Feder schreibt, während das Pulver in der Bombe verbrennt, die mit dem Druck zunehmende Stauchung auf einer mit berußtem Papier bespannten Trommel auf. Die Zündung des Pulvers erfolgt durch einen elektrisch geheizten Glühdraht. Die so aufgezeichnete Zeit-Stauchungskurve gibt aber nicht die wahre Zeit-Druckkurve, wie wir ja schon erörtert haben. Die Gesetze über die Pulververbrennung, wie sie Vieille, Wolff, Charbonnier u. a. entwickelt haben, sind aus Registrierungen des Druckes nach der Stauchungsmethode aufgestellt worden. Sie bedürfen daher alle noch der Nachprüfung durch moderne vollkommeneren Mittel.

<sup>13)</sup> Charpy, Mém. d'Art. de la Marine 1898.

<sup>14)</sup> Charbonnier, Rev. d'Art., Nov. 1908.

<sup>15)</sup> Lamothe, Mém. de l'Art. franç. 14, 1935.

## 2. Druckaufzeichnung mittels starker Feder

Die Aufzeichnung mit einer Feder hat zuerst Petavel<sup>16)</sup> vorgenommen. Er benutzte bei der Aufzeichnung auf einer mit berußtem Papier bespannten Trommel noch verhältnismäßig weiche Federn (geringe Frequenz). Mit der Theorie dieser Aufzeichnung haben sich Charbonnier<sup>17)</sup>, Nernst<sup>18)</sup>, Pier<sup>19)</sup> sowie Bjerrum<sup>20)</sup> befaßt. Nernst und seine genannten Schüler hatten allerdings nur die Druckregistrierung bei Gasexplosionen im Auge (niedere Drucke, langsamer Anstieg), die sie zu ihren bekannten Untersuchungen über die Abhängigkeit der spezifischen Wärmen der Gase von der Temperatur gebrauchten. Ziemlich einwandfreie Aufzeichnungen des Druckverlaufs bei der Pulververbrennung hat Schmitz<sup>21)</sup> erhalten. Schmitz verwandte eine sehr starre Balkenfeder von hoher Eigenfrequenz.

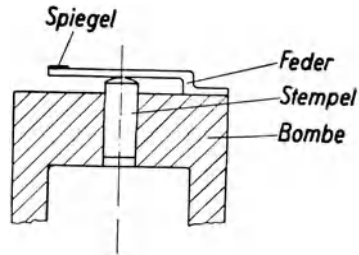


Abb. 12. Druckregistriervorrichtung mittels starker Feder (Schmitz)

Bei Schmitz wird der Stempel durch den Druck der Pulvergase gegen die Feder, die die Form eines starken Balkens hat, gedrückt. Die kurze Bewegung des Balkenendes wird über einen Spiegel optisch stark vergrößert photographisch aufgezeichnet.

Statt der Feder sind später auch starke Stahlmembrane verwendet worden. Schmitz hat die Bomben sehr groß gewählt, um die Treibladung in derselben Form unterzubringen, wie beispielsweise im Geschütz, nachdem Charbonnier darauf hingewiesen hat, daß die Gesetze der Gasentwicklung bei dieser der Praxis entsprechenden Anordnung der Ladung, Bündel von Röhren oder Streifen, anders ausfallen könnten, als wenn man etwa in kleinen Bomben die Druckentwicklung beim Abbrand einzelner Pulverelemente, also einzelner Röhren oder Streifen aufzeichnet.

<sup>16)</sup> I. E. Petavel, The pressure of Explosions. Phil. Trans. (A) **205**, 357—398, 1905 und Proc. Roy. Soc. (A) **76**, 492—494, 1905.

<sup>17)</sup> P. Charbonnier, Rev. de l'Art. 1908 und Mém. de l'Art. Navale 1907, Heft 3, p. 283.

<sup>18)</sup> W. Nernst, Ber. d. preuß. Akad. d. Wissensch. 1915, S. 896.

<sup>19)</sup> M. Pier, ZS. el. Chem. **15**, 536, 1909; **16**, 897, 1910.

<sup>20)</sup> Bjerrum, ZS. phys. Chem. **79**, 313, 1912.

<sup>21)</sup> O. Schmitz, Neue Versuche der Friedr. Krupp A.-G. über innere Ballistik und Artillerie, Monatsh. 1913, Nr. 84, S. 482 u. 1914, Nr. 86, S. 85.

Um mit Federn oder Membranen richtige Aufzeichnungen zu erhalten, muß deren Eigenschwingungsdauer kleiner als die Verbrennungsdauer des Pulvers sein.

### 3. Piezoelektrisches Druckmeßverfahren

Es ist seit langem bekannt, daß bei einigen Kristallen, u. a. bei Turmalin, Quarz und Seignettesalz, wenn sie in der Richtung der elektrischen Achse belastet werden, eine Ladungsverschiebung eintritt. Die durch Druck frei werdende Elektrizitätsmenge  $Q$  ist der Belastung  $K$  direkt proportional,  $Q = K \times B$ . Die piezoelektrische Konstante  $B$  ist in weitem Bereich konstant.

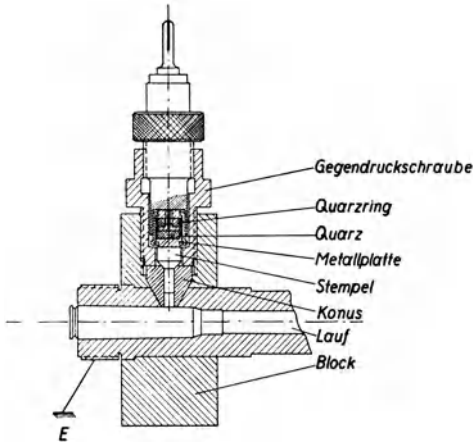


Abb. 13. Piezoelektrischer Gewehrgasdruckmesser

Unter Ausnutzung dieser piezoelektrischen Eigenschaften des Quarzes hat die Firma Zeiss-Ikon in Dresden ein Gerät entwickelt, das für ballistische Messungen gut geeignet ist<sup>22)</sup>.

Es können dieselben Gasdruckgewehre wie bei stauchzylindrischer Druckmessung benutzt werden, nur daß an Stelle des Stauchzylinders und des Widerlagers ein Druckelement mit dem Piezoquarz tritt (Abb. 13). Bei dem Zeiss'schen Gerät ist die Anwendung so gewählt, daß die eine Seite des Quarzes mit dem Stempel des Gasdruckmessers und damit mit dem geerdeten Gewehr in leitender Verbindung steht, während die andere Seite eine hoch isolierte Verbindung durch die Haltevorrichtung des Druckelements hindurch besitzt und über ein Panzerkabel mit dem Gitter einer Elektrometerröhre verbunden ist (Abb. 14). Die dem Druck  $P$  entsprechende Aufladung des Quarzes steuert somit den Anodenstrom der Elektrometerröhre. In einer nachfolgenden Röhre wird die Spannung soweit verstärkt, daß sie zur Steuerung der Braunschen Röhre ausreicht. Die Spannung  $u$  am Gitter beträgt  $u = PB/qC$ , wobei  $C$  die gesamte Kapazität bedeutet, die dem Quarz parallel geschaltet ist;  $q$  ist der Stempelquerschnitt

<sup>22)</sup> Joachim u. Illgen, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1932.

der Druckmeßeinrichtung. Zwischen dem Gitter der Elektrometer-  
röhre und der geerdeten Kathode ist ein auswechselbarer Block-  
kondensator angebracht, durch den man den Verstärkungsgrad je  
nach dem zu erwartenden Maximaldruck ändern kann. Die zeitliche  
Auflösung und Aufzeichnung des Vorganges geschieht durch ein  
Registriergerät auf einer rotierenden Trommel. Durch die statische  
Belastung des Quarzes und Messung der dazugehörigen Ablenkung  
des Kathodenstrahles kann man die Eichkurve aufnehmen. Da die

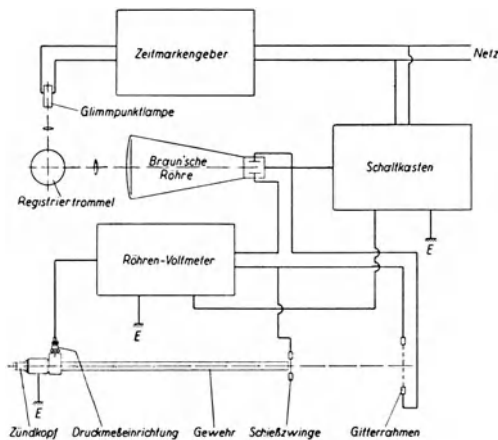


Abb. 14. Schaltbild des piezoelektrischen Gasdruckmessers

Ladungserzeugung und damit die Spannung am Gitter der Elektrometer-  
röhre der Belastung direkt proportional ist, kann die Eich-  
kurve auch auf elektrischem Wege aufgestellt werden, indem man  
an das Gitter die der Belastung entsprechende Spannung legt und  
die Ablenkung des Kathodenstrahles mißt.

Das Gerät ist so aufgebaut, das man nur einen Wechselstrom-  
anschluß benötigt. Alle Spannungen für die Heizungen der Röhren  
sowie die Anodenspannungen usw. werden durch Transformatoren  
und Gleichrichter in einem Netzgerät erzeugt. Um von Netz-  
spannungsschwankungen unabhängig zu sein, wird die Anoden-  
spannung durch Glimmstrecken stabilisiert. Durch eine stimmgabel-  
gesteuerte Glimmlampe können bei jedem Schuß Zeitmarken mit  
aufgenommen werden.

Mit dem Piezoindikator erhält man ein Druck- und Zeitdiagramm.

Den Zeitpunkt des Geschoßaustrittes aus dem Laufe kann man  
dadurch registrieren, daß man durch das Geschoß eine kurzzeitige  
Verbindung zwischen dem Lauf und einer Ablenkplatte des Braun-  
schen Rohres herstellt (Schießzwinge) und so eine Auslenkung des

Elektronenstrahles (Erdungsmarke) erhält, die sich als Unterbrechung der Druckkurve markiert. Damit kann man auch den Mündungsdruck ohne weiteres feststellen. Läßt man durch das Geschloß eine

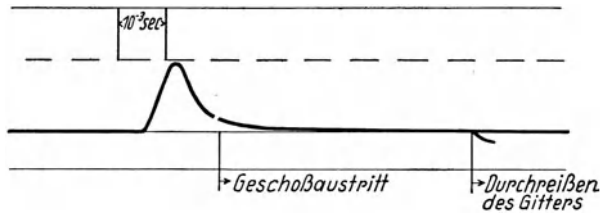


Abb. 15. Piezoelektrische Druckkurve

der Verbindungen vom Röhrenvoltmeter zum Braunschens Rohr unterbrechen, z. B. mit Hilfe eines Bensbergschen Gitters oder eines gewöhnlichen Streifens, so erfährt der Elektronenstrahl eine weitere Ablenkung. Aus der zeitlichen Verschiebung der beiden

Markierungen kann man bei bekanntem Abstand von Schießzwinde und Gitter die Anfangsgeschwindigkeit ermitteln.

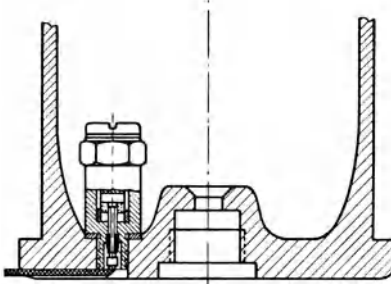


Abb. 16. Piezoelektrisches Meßgerät

Das piezoelektrische Druckmeßverfahren läßt sich auch für die Ermittlung des Gasdruckes in Geschützen verwenden.

Die Firma Zeiss-Ikon hat ein piezoelektrisches Meßgerät entwickelt, das in eine gewöhnliche Kartusche, die nur im Boden ein

Loch besitzen muß, eingeschraubt wird. Am Geschütz selbst braucht keine Änderung vorgenommen zu werden.

In ähnlicher Weise ist das piezoelektrische Meßverfahren zur Druckregistrierung in der Verbrennungsbombe anwendbar.

#### 4. Rücklaufmessung

Die Registrierung des zeitlichen Verlaufs des Druckes in absolutem Maße selbst in unverzerrter Form gibt uns aber noch keinen vollen Aufschluß über die Druckentwicklung beim Schuß. Denn wir wissen aus ihr zwar, wie hoch der Druck zu jeder Zeit ist, nicht aber, wo das Geschloß sich befindet, wenn der Druck im auf- oder absteigenden Ast einen bestimmten Wert besitzt.

Das könnten wir nur aus der Zeitdruckkurve ableiten, wenn keine nennenswerten Widerstände gegen die Geschloßbewegung im Lauf

oder Rohr auftreten würden, also allenfalls bei Geschützen und Schrotflinten.

In diesem Falle haben wir für den Geschößweg  $x$ , bei der Geschößmasse  $m$  die Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Pq = m \frac{dv}{dt},$$

wenn  $P$  der augenblickliche Druck auf das Geschöß vom Querschnitt  $q$  ist und  $v$  die augenblickliche Geschwindigkeit bedeutet.

Wir haben dann:

$$m dv = q P dt \quad \text{oder:} \quad m v = q \int_0^t P dt = q F(t).$$

$F(t)$  können wir durch Planimetrieren der erhaltenen Zeitdruckkurve für jeden Wert von  $t$  finden. Dann ergibt sich weiter, da  $v = dx/dt$ :

$$m dx = q F(t) dt \quad \text{und} \quad m x = q \int_0^t F(t) dt.$$

Wir bekommen also in diesem Falle den Geschößweg als Funktion der Zeit, und da wir auch  $P$  (etwa auf piezoelektrischem Wege) als Funktion von  $t$  kennen, können wir Druck und Geschößgeschwindigkeit als Funktion des Geschößweges erhalten.

Nun ist der Druck auf den Geschößboden nicht derselbe wie auf dem Boden des Rohres oder Laufes und andererseits ist die Reibung zumal in gezogenen Läufen keineswegs zu vernachlässigen.

Wir bedürfen also für die experimentelle innere Ballistik noch eines anderen experimentellen Verfahrens, und das ist z. B. die Methode des Rücklaufmessers. Sie ist keineswegs durch die vollkommenen Verfahren der Gasdruckaufzeichnung überflüssig geworden, sondern beide müssen vereinigt werden, um völligen Aufschluß über die Geschößbewegung zu geben.

Die Rücklaufmessermethode ist zuerst von Sébert und Hugoniot<sup>23)</sup> angegeben worden. Sie hatten ihre Arbeit unternommen, um die Grundlagen für eine Abbremsung des Rohrrücklaufs zu gewinnen. Sie erkannten dabei die Bedeutung der Aufzeichnung der Rücklaufbewegung des ungehemmt in Schlittenführung zurückgleitenden Rohres für die innere Ballistik überhaupt und haben in der genannten Schrift ihre Schlüsse bis zur Entwicklung einer rationellen inneren Ballistik verfolgt.

<sup>23)</sup> Sébert u. Hugoniot, Etude sur les effects de la poudre dans un canon de 10 cm. Paris 1882.

Die Aufzeichnung der Bewegung des Rohres geschah dadurch, daß eine ortsfeste, in Schwingung versetzte Stimmgabel ihre Schwingungen auf eine ebene, mit dem Geschütz bewegte Platte zeichnete. Man erhält die Zeit-Wegkurve des Rohres, indem man die Rohrwege als Funktion der Zeit für die verschiedenen Durchgänge der Schwingungen durch die Ruhelage ermittelt.

Aus der Zeit-Wegkurve leitet man dann durch Differentiation zunächst die Zeit-Geschwindigkeitskurve und dann durch die zweite Differentiation die Zeit-Beschleunigungskurve ab. Da die Masse des zurückgleitenden Rohres mit der jeweiligen Beschleunigung



Abb. 17. Aufzeichnung einer ortsfesten Stimmgabel auf eine mit dem Rohr bewegte Platte

multipliziert, die augenblicklich auf das Rohr wirkende Kraft ergibt, und diese gleich dem Produkt von Gasdruck und Geschoßquerschnitt

ist, so würde man, wenn zwischen Geschoß und Rohr keine Reibung bestünde, die Zeit-Gasdruckkurve erhalten. Nun sind zwar die Widerstände gegen die Geschoßbewegung im gezogenen Rohr auch bei Geschützen nicht unerheblich. Wegen des großen Querschnittes ist es aber bei den Geschützen viel günstiger als bei Gewehren. Man kann also aus richtig aufgezeichneten und ausgewerteten Rücklaufkurven den zeitlichen Verlauf des Gasdruckes nahezu unverzerrt und im absoluten Maße erhalten, wenn es sich um Versuche mit Geschützen nicht zu kleinen Kalibers handelt, oder wenn man die Reibung kennt und berücksichtigt.

Wir wollen aber nicht nur den Gasdruck als Funktion der Zeit, sondern auch des Ortes des Geschosses im Rohr kennen. Uns ist aus der Rücklaufbewegung der Gasdruck als Funktion des Rohrweges bekannt. Die Beziehung zwischen Rohr- und Geschoßweg erhalten wir unter Benutzung des Schwerpunktsatzes der Mechanik. Betrachten wir Rohr und Geschoß als ein abgeschlossenes System, so ist der das Geschütz nach hinten und das Geschoß nach vorn treibende Gasdruck der Pulvergase für dieses System eine innere Kraft. Durch innere Kräfte kann der Schwerpunkt eines Systems nach dem erwähnten Satz der Mechanik nicht bewegt werden. Nennen wir  $R$  und  $x_R$  Masse und Weg des Rohres in einem ortsfesten Koordinatensystem und  $G$  und  $x_g$  Masse und Weg des Geschosses, so ist

$$R x_R - G x_g = 0 \quad \text{oder} \quad x_g = \frac{R}{G} x_R.$$



Der Geschößweg im Rohr ist dann aber  $x = x_g + x_R$ , also

$$x = x_R \frac{R + G}{G}.$$

Das wäre sehr einfach, wenn Rohr und Geschöß die einzigen bewegten Massen wären, die in Betracht kommen. Die Masse der Gase ist keineswegs zu vernachlässigen, beim Gewehr gegenüber der Geschößmasse schon gar nicht, und ebensowenig bei Geschützen, zumal bei weittragenden Geschützen großen Kalibers.

Wir müssen also die Verteilung der Gase und die Lage ihres jeweiligen Schwerpunktes kennen, um den Schwerpunktssatz genau anwenden zu können. Die Bewegung der Gase hinter dem Geschöß bildet den Gegenstand eines sehr verwickelten Problems. Dieses Problem, in idealisierter Form, ist zuerst von Lagrange im Jahre 1793 in Angriff genommen worden. Er macht die nicht zutreffende Annahme, daß das Pulver vor Beginn der Geschößbewegung schon vollständig vergast ist, und daß das Geschöß ohne Reibung durch den Lauf bewegt wird. Er hat versucht, die Bewegung des Stempels und der Gase zu berechnen. Lagrange war mit den Ergebnissen seiner Untersuchungen nicht zufrieden. Erst nach Lagranges Tode hat 1831 Poisson dessen diesbezügliche Arbeit veröffentlicht<sup>4)</sup>.

Eine vollständige und befriedigende Lösung und Darstellung hat das Problem, das allgemein das Lagrangesche genannt wird, auch heute meines Erachtens noch nicht gefunden. Es wurde von Hugoniot<sup>24)</sup>, Charbonnier<sup>25)</sup>, Gossot und Liouville<sup>26)</sup> und Pidduc und Love<sup>27)</sup> behandelt. Auch 1936 und 1937<sup>28)</sup> erschienene Arbeiten zeigen die Wichtigkeit, die man der Lösung dieses Problems ungeachtet der Abweichungen von den wirklichen Vorgängen in der Waffe auch heute noch beimißt. In der Tat würde die Lösung eine theoretische Einsicht gewähren, wie groß der Einfluß der Gasbewegung auf die Ermittlung der Weg-Zeitkurve des Rohres im extremen Falle überhaupt sein kann.

Für die Aufklärung der tatsächlichen Verhältnisse kommt freilich nur die experimentelle Forschung in Betracht, zumal es sich ja nicht allein um die Verteilung der Gase in jedem Augenblick, sondern auch

<sup>24)</sup> Hugoniot, Mémoire sur la propagation des mouvements dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. Journ. de l'Ecole Polytechnique 57 u. 58, 1877.

<sup>25)</sup> Charbonnier, Balistique intérieure. Paris 1907.

<sup>26)</sup> Gossot u. Liouville, Balistique intérieure. Paris 1922, p. 110—173.

<sup>27)</sup> Pidduc u. Love, Phil. Trans. Roy. Soc. 1922.

<sup>28)</sup> Platrier, Mém. de l'Art. franc. 15, 1936; Pidduc u. Love, ebenda 16, 1937.

um die der unverbrannten Teile der Treibladung handelt. Sébert nahm zunächst einfach an, daß der Schwerpunkt der brennenden Treibladung und der gebildeten Gase in jedem Augenblick in der Mitte der Gassäule liegt, die sich zwischen Rohr- und Geschosßboden befindet. Diese Annahme führt zu dem Ansatz:

$$R x_R - G x_g - \tilde{\omega} \frac{x_g - x_R}{2} = 0,$$

$$x_g = \frac{R + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{G + \frac{\tilde{\omega}}{2}} x_R$$

( $\tilde{\omega}$  ist das Gewicht der Ladung). Hieraus ergibt sich für den Geschosßweg  $x = x_g + x_R$  im Rohr:

$$x = \frac{R + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{G + \frac{\tilde{\omega}}{2}} x_R + x_R = \frac{R + G + \tilde{\omega}}{G + \frac{\tilde{\omega}}{2}} x_R.$$

Durch Differentiation der Gleichung für  $x_g$  nach der Zeit erhält man außerdem für die Geschosßgeschwindigkeit, die ja zweckmäßig auf den festen Raum bezogen wird:

$$v_g = \frac{R + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{G + \frac{\tilde{\omega}}{2}} v_R.$$

Wieweit die Sébertsche Annahme in einzelnen Fällen zutreffend ist, läßt sich, wie gesagt, zur Zeit nur experimentell prüfen. Die hierin noch liegende Unsicherheit kommt für die Auswertung der Zeit-Gasdruckkurve aus den Rücklaufmessungen, sofern es sich um den Gasdruck, der auf den Rohrboden wirkt, handelt, überhaupt nicht in Frage, höchstens wenn man den Gasdruck in bezug auf den Weg des Geschosses wissen will.

Dagegen würde sich ein Fehler in der Sébertschen Annahme auf die Auswertung der Geschosßgeschwindigkeiten bemerkbar machen, und zwar verhältnismäßig stark. Die Geschwindigkeit des Geschosses an bestimmten Stellen im Lauf kann man auch dadurch messen, daß man die Läufe abschneidet und bei Verwendung der gleichen Munition die jeweilige  $v_0$  mißt. Werden mit den abgeschnittenen Läufen gleichzeitig Rücklaufmessungen durchgeführt, so kann man die Sébertschen Annahmen prüfen bzw. den Anteil der Ladung (Sébertscher Faktor) bestimmen, der zur Geschosßmasse zuzuzählen

ist. Die Bestimmung der Geschößgeschwindigkeit im Lauf durch allmähliche Verkürzung des Laufes ist lange vor der Einführung des Rücklaufmessers schon von I. Léfèvre durchgeführt worden. Er hat Versuche mit einem Schweizer Gewehrmodell, die eine Kommission in der genannten Weise ausgeführt hat, bearbeitet und in einer auch heute noch lesenswerten kleinen Schrift<sup>29)</sup> in dem genannten Sinne bearbeitet. Interessant ist seine Darstellung der Geschwindigkeit  $v = \frac{ax}{x+b}$ , auf die wir später noch eingehen werden.

Es ist dies wohl der erste bekannte Versuch, den Verlauf der Geschwindigkeit und des Gasdruckes im Lauf zu ermitteln, der auch um so bemerkenswerter ist, zumal die Registrierung der Rücklaufbewegung durch Aufzeichnung von Stimmgabelschwingungen nach Sébert für Gewehre auf Schwierigkeiten stößt, da man Stimmgabeln von so hoher Frequenz anwenden müßte, daß eine direkte Aufzeichnung unmöglich wäre. Hier wird die direkte Aufzeichnung des Weges mit einer am Gewehrlauf verbundenen Stahlfeder unerlässlich. Die Aufzeichnung der Zeit-Wegkurve in dieser Weise war Sébert nicht unbekannt, da er sie ja bereits zur Ermittlung des Gasdruckes in Bomben, wie später auch Burlot, verwendet hat.

Für Gewehre hat meines Wissens zuerst Wolff<sup>30)</sup> schon vor 1900 die Methode der unmittelbaren Aufzeichnung angewandt. Diese Methode hat aber gewisse Nachteile. Die Kurve wird sehr klein, und die Grundlinie kann schwer fein genug erhalten werden, da die Trommel, auf der die Schreibfeder ihre Bewegung zeichnen soll, schon im Umlauf sein muß, ehe der Schuß ausgelöst wird.

Es sind deshalb zur Aufzeichnung des Laufweges optische Methoden angewandt worden. Ich habe bereits 1907 folgende Methode angewandt<sup>31)</sup>.

Mit dem Lauf starr verbunden ist eine Metallplatte, die eine feine Lochblende trägt. Die Blende wird durch eine Bogenlampe ausgeleuchtet, stellt also einen mit dem Lauf starr verbundenen festen leuchtenden Punkt dar. Die Bewegung wird auf einer umlaufenden Trommel photographisch registriert. Man kann den Punkt mit einer elektromagnetisch gesteuerten Blende verdunkeln,

<sup>29)</sup> I. Léfèvre, *Loi du mouvement d'un Projectile dans l'Intérieur du Canon*. Paris, 1872.

<sup>30)</sup> W. Wolff, *ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw.* 1907.

<sup>31)</sup> Bollé, *ZS. f. techn. Phys.* **3**, 6, 206, 1922; *ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw.* 1931.

und ihn erst so kurz vor Beginn des Schusses freigeben, daß die Trommel keine ganze Umdrehung zwischen Freigabe und Beginn der Rücklaufbewegung mehr macht. Die Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel wird durch einen Frequenzmesser festgestellt,

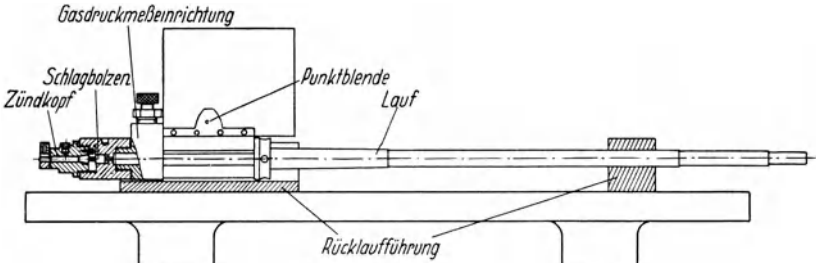


Abb. 18. Optischer Gewehrrücklaufmesser von Bollé

während mit Hilfe eines Austrittsfunkens der Zeitpunkt des Geschösaustritts festgelegt wird.

Cranz und Becker<sup>32)</sup> haben mit dem zurückgleitenden Lauf einen Hebelarm gekuppelt und so die Bewegung in die Umdrehung

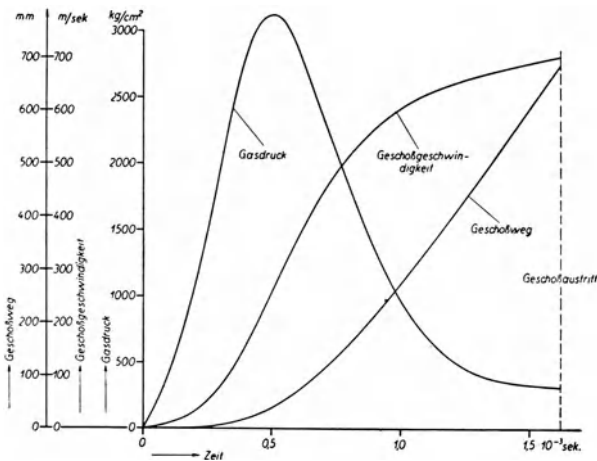


Abb. 19. Weg-Geschwindigkeits- und Gasdruckzeitkurven für die Büchse 9,3 × 74 R. Ladung 3,5 p R 5, Geschöfgewicht 18,5 p

eines Spiegelchens umgesetzt, wodurch sie die Bewegung optisch stark vergrößert registrieren konnten.

Bei der Durchführung von Rücklaufmessungen ist vor allen Dingen auf die vollkommene Starrheit der bewegten Teile zu achten.

<sup>32)</sup> C. Cranz, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. **2**, 45, 1907; K. Becker, ebenda **4**, 401, 425, 448, 1909.

Schwingungen der Einzelteile müssen vermieden werden. Besonderer Wert ist darauf zu legen, daß beim Schuß durch Laufbewegungen keine Klemmungen in der Gleitbahn entstehen.

Tabelle 4. Rücklaufkurve mit der Büchse 9,3 × 74 R.

3,5 p Pulver R 5, 18,5 p schweres Geschoß. Rücklaufgewicht 4632 p.  
Trommelumfang 313 mm. Drehzahl: 75/sec. Vergrößerung: 9,13

Rücklaufweg (vergr.)	1. Differenzenquotient		2. Differenzenquotient		Geschoßweg mm	Geschoßgeschwindigkeit m/sec	Gasdruck kp/cm <sup>2</sup>
	abgelesen	korrigiert	abgelesen	korrigiert			
32,00							
29,53	4,84	4,824	0,006		743		
27,16	4,74	4,768	0,063	0,060	684	701	314
24,79	3,73	4,705	0,065	0,063	624	692	330
22,43	4,62	4,640	0,068	0,066	565	682	346
20,17	4,55	4,572	0,072	0,070	508	672	367
17,88	4,52	4,500	0,090	0,080	430	662	419
15,65	4,38	4,410	0,112	0,100	394	649	524
13,50	4,29	4,298	0,150	0,130	340	632	681
11,36	4,18	4,148	0,198	0,173	286	610	907
9,32	3,97	3,950	0,266	0,230	235	581	1208
7,39	3,69	3,684	0,345	0,302	186	542	1580
5,63	3,32	3,339	0,423	0,383	142	491	2010
4,07	2,92	2,916	0,504	0,467	102	429	2450
2,71	2,41	2,412	0,580	0,550	68	355	2890
1,66	1,82	1,832	0,590	0,595	42	269	3120
0,89	1,24	1,242	0,518	0,565	22	183	2960
0,42	0,72	0,724	0,364	0,447	11	106	2350
0,17	0,36	0,360	0,208	0,274	4	53	1490
0,06	0,15	0,152	0,096	0,150	1,5	22	786
0,02	0,06	0,056	0,038	0,065	0,5	8	340
0,00	0,02	0,018			0,00	2,6	115
0,00	0,00						

Mit Tabelle 4 und Abb. 19 wollen wir eine Auswertung betrachten. Die Ausmessung der Zeit-Wegkurve enthält die den Rücklaufwegen entsprechenden Ordinaten, die in hinreichend dicht gewählten gleichmäßigen Zeitintervallen aufeinander folgen. Man hat in den den Ordinaten entsprechenden Differenzen zwischen den vorhergehenden und folgenden Ordinaten eine Differenzenfolge, aus der man zugleich die Korrektheit der Aufzeichnung und das Kriterium für den wahren Wert der ersten und zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit entnehmen kann. Geben die ersten Differenzen für gleichmäßige aufeinanderfolgende Zeiten als Abszissen keine glatte Kurve, so ist eine ausgleichende Kurve hindurchzulegen und zu

beurteilen, ob die Abweichungen der einzelnen Punkte den möglichen Ablesungsfehlern entsprechen. Sind die Abweichungen größer, so ist die Bewegung der rücklaufenden Teile gestört (z. B. durch Schwingungen), und dieser Fehler, der mechanischen Unvollkommenheiten entspricht, muß beseitigt werden, wenn er die Auswertung und die kritische Feststellung der wahren Werte der Differentialquotienten erheblich beeinträchtigt.

### 5. Geschößgeschwindigkeitsmessung

Neben der Ermittlung des Gasdruckes, der aus Gründen der Rohrfestigkeit und der Sicherheit von Wichtigkeit ist, spielt die Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit eine große Rolle, da sie ein Maß für die Leistung der Waffe ist.

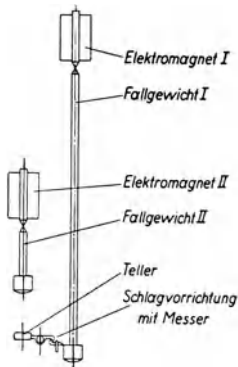


Abb. 20. Schema des Flugzeitmessers „Le Boulengé“

Gegenüber der Gasdruckmessung können bei der Geschwindigkeitsmessung, die doch nur eine Zeitmessung darstellt, Meßgeräte benutzt werden, die auch für andere Zeitmessungen entwickelt wurden. Bei elektrischer Messung erhält man die Zeitmarken dadurch, daß man durch das Geschöß elektrische Verbindungen aufheben oder herstellen läßt, oder sonst einen elektrischen Effekt wie Induktionen beim Durchschießen von Spulen mit magnetisierten Geschossen usw. verwendet.

Außerdem kann man durch das Geschöß einen Lichtstrahl unterbrechen lassen, was mit Hilfe von Photozellen eine trägheitslose Registrierung gestattet.

Das meist benutzte Gerät zur Bestimmung der Geschößgeschwindigkeit ist der Le-Boulengé-Flugzeitmesser, dessen Prinzip kurz folgendes ist.

Zwei Fallgewichte werden elektromagnetisch gehalten und durch die Unterbrechung der jeweiligen Stromkreise ausgelöst. Das Fallgewicht 2 trifft auf einen Teller auf und betätigt dadurch eine Schlagvorrichtung, die auf dem Mantel des Fallgewichtes 1, der aus einem weichen Material (Zink, Aluminium usw.) besteht, eine Marke schlägt. Die Verzögerungszeit der Auslösungs- und Schlagvorrichtung kann durch gleichzeitige Unterbrechung beider Stromkreise genau bestimmt und eliminiert werden (Ausschalt- bzw. Disjunktionsmarke). Aus der Fallhöhe des Gewichtes 1 bzw. des Abstandes des Einschlages von der Disjunktionsmarke kann man die Zeit (bis auf  $10^{-4}$  sec genau) bestimmen.

Sehr einfach gestaltet sich die Geschwindigkeitsmessung, wenn sie mit der Gasdruckmessung gleich gekoppelt werden kann. Bei dem optischen Rücklaufmesser z. B. werden die Funkenbilder beim Austritt des Geschosses aus dem Lauf und nach Durchfliegen einer bestimmten Strecke auf dieselbe Trommel aufgenommen. Ähnlich ist es bei dem Piezoindikator. Hier wird einmal durch das Geschöß in dem Augenblick, wo es gerade den Lauf verlassen will, eine elektrische Verbindung zwischen dem geerdeten Lauf und der einen Ablenkplatte des Kathodenstrahloszillographen hergestellt und nach Durcheilen der Meßstrecke die Verbindung zwischen einer Platte des Braunschens Rohres und dem Röhrenvoltmeter unterbrochen. Beide Vorgänge markieren sich in der Druck-Zeitkurve.

Bei den Verfahren, die Geschößgeschwindigkeit auf photographischem Wege zu ermitteln, ist die von Cranz und Schardin entwickelte Hochfrequenzfunkenkinematographie zu einer gewissen Vollkommenheit gebracht worden.

### III. Empirische Formeln zur Berechnung der inner-ballistischen Werte

#### 1. Berechnung nach Heydenreich

Es ist schon verhältnismäßig früh versucht worden, die Ergebnisse der Rücklaufmessungen für eine rationelle innere Ballistik durch über die Einzelfälle hinausgehende Verallgemeinerungen zu verwenden. Schon Sébert und Hugoniot haben aus ihren Rücklaufmessungen eine vollständige Theorie der Geschößbewegung im Rohr entwickelt, indem sie zu theoretischen Annahmen gewisse empirische, aus Rücklaufmessungen abgeleitete Gesetzmäßigkeiten hinzufügten. Besonders Heydenreich<sup>33)</sup> hat aus den Rücklaufmessungen solche allgemeinen Gesetzmäßigkeiten empirisch abgeleitet, so daß man für Geschütze, wenn der Maximaldruck und die Mündungsgeschwindigkeit bekannt sind, die übrigen Daten berechnen kann. Auch Vallier<sup>34)</sup> hatte Tabellen aufgestellt, die dieser Aufgabe dienen sollten.

Aber die Methode von Heydenreich war nicht wie die von Vallier auf nicht zutreffende Annahmen über den Gasdruckverlauf, sondern auf das empirische Material der Rücklaufmessungen gestützt. Wir wollen daher hierauf etwas näher eingehen.

Für eine gegebene Rücklaufmessung ergibt sich der Gasdruck als Funktion des Geschößweges  $x$  daher auch als Funktion von  $x/x_m$ , wo  $x_m$  der Geschößweg bis zum Eintritt des Druckmaximums ist. Nun nahm Heydenreich an und versuchte an dem ihm vorliegenden empirischen Material von Rücklaufmessungen nachzuweisen, daß das Verhältnis des Druckes  $P$  zum Maximaldruck  $P_m$ , also  $P/P_m$  immer dieselbe Funktion von  $x/x_m$  ist, und ebenso das Verhältnis der Geschößgeschwindigkeit für einen Geschößweg  $x$  zu der am Orte des Druckmaximums  $x_m$  vorhandenen Geschwindigkeit  $v_m$ , also  $v/v_m$  immer dieselbe Funktion von  $x/x_m$  ist. Er führte ferner für jeden Weg  $x$  das sogenannte Druckverhältnis  $y$  ein. Dies ist das Verhältnis desjenigen Druckes  $D$ , welcher in konstanter Höhe während des

---

<sup>33)</sup> Heydenreich, Kriegstechn. ZS. 1900, Heft 6 u. 7 u. 1901, Heft 6.

<sup>34)</sup> Vallier, C. R. **128**, 305, 1899; **129**, 258, 1899; ferner Mém. des poudres et salpêtres 1902, p. 129.



ganzen Weges  $x$  wirkend dem Geschoß die für den Weg vorhandene Geschoßgeschwindigkeit erteilt hätte, zu dem Maximaldruck. Es ist also

$$y = \frac{D}{P_m}.$$

Da Heydenreich der Sébertschen Annahme folgt, so hat nach ihm die dem mittleren Druck  $D$  entsprechende Arbeit  $Dqx$

beim Querschnitt  $q$  des Geschosses die lebendige Kraft  $\frac{1}{2} \frac{G + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{g} v^2$

erzeugt, wenn  $G$  und  $\tilde{\omega}$  Gewicht von Geschoß und Ladung,  $v$  die am Orte  $x$  vorhandene Geschoßgeschwindigkeit und  $g$  die Fallbeschleunigung bedeutet. Es ist also

$$Dqx = \frac{1}{2} \frac{G + \frac{\tilde{\omega}}{2}}{g} v^2,$$

und demnach das Druckverhältnis  $y$  für den Weg  $x$  oder für die Größe  $x/x_m$

$$y = \frac{D}{P_m} = \frac{\left(G + \frac{\tilde{\omega}}{2}\right) v^2}{2gqxP_m}.$$

Heydenreich nimmt an, daß  $y$  stets dieselbe Funktion von  $x/x_m$  ist. Die Annahme von Heydenreich kann man demnach auch so formulieren:

$$\frac{x}{x_m} = \Sigma(y), \quad \frac{P}{P_m} = \Pi(y) \quad \text{und} \quad \frac{v}{v_m} = \Omega(y)$$

sind alle ein für allemal gegebene Funktionen von  $y$ .

Diese Annahme kann man an dem Material von Rücklaufmessungen prüfen, indem man nachsieht, ob man z. B. bei graphischer Darstellung für ein und denselben Wert  $y$  auch stets nahezu zu denselben Werten, der Funktionen  $\Sigma(y)$ ,  $\Pi(y)$  und  $\Omega(y)$ , gelangt. Das glaubte Heydenreich aus den ihm zur Verfügung stehenden Rücklaufmessungen mit einiger Genauigkeit bestätigt zu finden.

Er hat die Ergebnisse dieser Untersuchung graphisch und tabellarisch dargestellt. Ich gebe nachstehend die Tabelle (etwas abgekürzt) wieder, wie sie Heydenreich als abschließende empirische Darstellung in seinem Buch<sup>35)</sup> angegeben hat.

Um nun den Gebrauch der Tabelle zu erläutern und uns zugleich eine Vorstellung von ihrer Leistungsfähigkeit zu machen, wollen wir sie einmal auf den angeführten Fall einer Rücklaufmessung für eine

<sup>35)</sup> Heydenreich, Lehre vom Schuß. Berlin, Mittler u. Sohn, 1908.

Tabelle 5

$\Sigma(y) = \frac{x}{x_m}$	$y$	$\Pi(y) = \frac{P}{P_m}$	$\Omega(y) = \frac{v}{v_m}$
0,25	0,445	0,690	0,375
0,50	0,615	0,890	0,624
1,00	0,790	1,00	1,00
2,00	0,843	0,769	1,460
5,00	0,663	0,397	2,046
7,00	0,572	0,297	2,250
10,00	0,476	0,214	2,453
20,00	0,312	0,108	2,812
30,00	0,238	0,071	3,004
40,00	0,194	0,052	3,152
50,00	0,164	0,041	3,220

Gewehrpatrone, nämlich auf die Jagdpatrone  $9,3 \times 74 R$  für ein 18,5 p schweres Geschöß, bei 3,5 p Blättchenpulver  $R 5$  machen (S. 31 angegebene Rücklaufkurve).

Aus den Daten der Waffe und der Ladung, sowie des Höchstdrucks und der Mündungsgeschwindigkeit berechnet man  $y$  zu 0,3517, woraus sich aus der Tabelle 5 eine Flugstrecke des Geschosses bei Erreichung des Druckmaximums von 37,5 mm ergibt; bei der Rücklaufmessung wurden 41 mm gemessen. Entsprechend erhält man für die Geschößgeschwindigkeit nach 11, 186 und 325 mm Flugweg 110, 530 und 640 m/sec, die Rücklaufmessung ergibt 106, 542 und 643 m/sec.

Wie man sieht, ist die Darstellung dieser Rücklaufmessung, die etwa 30 Jahre nach der Arbeit von Heydenreich nach möglichst genauer Methode und ohne jede Beziehung auf die alte Arbeit von Heydenreich gemacht wurde, ganz unerwartet gut.

Dies ist gewiß nicht immer so. Auf jeden Fall leistet die Tabelle von Heydenreich oft sehr gute Dienste, um für den Verlauf der Geschwindigkeit im Rohr einen Anhaltspunkt zu haben.

## 2. Formelsystem von Leduc und Leduc-Bollé

Ich will nun gleich auf eine andere Darstellung des Geschwindigkeitsverlaufs im Rohr zu sprechen kommen, welche formelmäßig die Geschwindigkeit  $v$  des Geschosses als Funktion des Geschößweges darstellt. Die sogenannte Leducsche Formel

$$v = \frac{ax}{x + b}.$$

Diese läßt sich ebenfalls an Rücklaufmessungen prüfen.

Diese Formel findet sich bereits lange vor Leduc in dem schon angeführten Büchlein von Léfèvre<sup>29)</sup>. Ob Leduc die Formel von dort entnommen hat, entzieht sich meiner Kenntnis. Denn Leduc hat selbst eine Veröffentlichung über sein System, soviel ich feststellen konnte, nicht erscheinen lassen. Die Formeln selbst finden sich in der öffentlichen Literatur nur in einem Buch von Challeat<sup>36)</sup>.

Jedenfalls hat Leduc die Geschwindigkeitsformel

$$v = \frac{ax}{x + b}$$

zu einem System ausgebaut, die die Lösung des Hauptproblems der inneren Ballistik enthält, indem er  $a$  und  $b$ , von den Daten der Ladung und der Waffe und von den Konstanten, die das Treibmittel charakterisieren, abhängig macht.

Das Leducsche Formelsystem lautet

$$\begin{aligned} \text{I. } v &= \frac{ax}{x + b}, \\ \text{II. } a &= 2096 \left( \frac{\tilde{\omega}}{p} \right)^{1/2} \Delta^{1/12}, \\ \text{III. } b &= \beta \left( \frac{c}{p} \right)^{3/8} \left( 1 - \frac{3}{4} \Delta \right). \end{aligned}$$

Hierin bedeutet  $\tilde{\omega}$  und  $p$  Gewicht von Ladung und Geschoß in kp,  $\Delta$  die anfängliche Ladedichte  $\tilde{\omega}/c$ , d. h. das Verhältnis von Ladung zum anfänglichen Laderaum  $c$ ,  $\beta$  eine Konstante, die für ein und dasselbe Pulver (gleiche Zusammensetzung, gleiche Form) gilt.

Man kann die Formeln auch noch schmiegsamer machen, wenn man den Wert 2090 durch eine zweite, das Pulver kennzeichnende Konstante ( $\alpha$ ) ersetzt.

Man sieht, daß dieses Formelsystem, von welchem wenigstens die Formeln II und III von Leduc selbst stammen, schon die ganze Lösung (in rein formaler Beziehung nicht in bezug auf die völlig befriedigende Übereinstimmung mit der Erfahrung) des Hauptproblems der inneren Ballistik enthält.

Wenn das Pulver durch eine oder zwei Konstanten hinreichend gekennzeichnet ist, soll der ganze Verlauf der Geschoßgeschwindigkeit und des Gasdruckes in irgendeiner bestimmten Waffe bei gegebener Größe des Ladungs- und Geschoßgewichts berechnet werden.

Auch kann man die Konstanten des Pulvers  $\alpha$  und  $\beta$  berechnen, wenn für irgendeine Waffe das Verhalten des Pulvers, d. h. Mündungsgeschwindigkeit und Gasdruck, gemessen ist.

<sup>36)</sup> S. Challeat, Mécanique des affûts. Paris 1909.

Den Gasdruck kann man aus der Formel  $v = \frac{ax}{x+b}$  berechnen, Es ist nämlich der Druck auf den Geschoßboden durch die Bewegungsgleichung  $\frac{p}{g} \frac{dv}{dt} = Pq$  gegeben, wenn  $\frac{p}{g}$  die Masse und  $q$  der Querschnitt des Geschosses ist. Nun ist  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ , also

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha x}{x+b} \left[ \frac{\alpha}{x+b} - \frac{ax}{(x+b)^2} \right],$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2 b x}{(x+b)^3}.$$

Der Druck auf den Geschoßboden ist hiernach

$$P = \frac{p}{q \cdot g} \frac{a^2 b x}{(x+b)^3}.$$

Man könnte also die Konstanten  $a$  und  $b$  ermitteln, wenn man für irgendeinen Geschoßweg  $x$  die Geschwindigkeit  $v$  und den Druck  $P$  auf den Geschoßboden kennt. Es genügt aber auch die Mündungsgeschwindigkeit  $v_e$  für den gesamten Geschoßweg  $x_e$  und den Maximaldruck  $P_m$  zu kennen, denn aus der Formel  $P = \frac{p}{qg} \frac{a^2 b x}{(x+b)^3}$  folgt, daß der Maximalgasdruck bei demjenigen Geschoßweg  $x_m$  stattfindet, für welchen:

$$\frac{d}{dx} \frac{a^2 b x}{(x+b)^3} = 0,$$

$$\frac{a^2 b}{(x+b)^3} - 3 \frac{a^2 b x}{(x+b)^4} = 0,$$

$$x = \frac{b}{2}.$$

Hiermit gewinnt die Größe  $b$  der Formel eine einfache Bedeutung. Es ist der doppelte Weg, den das Geschoß bis zum Eintritt des Maximaldruckes zurücklegt.

Setzt man diesen Wert von  $x$  in die oben abgeleitete allgemeine Formel für den Druck  $P$  ein, so ergibt sich für den Maximaldruck auf den Geschoßboden

$$P_m = \frac{p}{q \cdot g} \frac{4}{27} \frac{a^2}{b}.$$

Machen wir nun die Annahme von Sébert, daß der Schwerpunkt der Ladung jederzeit in der Mitte des für die Gase und unvergasteten Teile der Ladung freien Raumes liegt, so erhalten wir für den Druck

auf den Rohrboden, den wir ja durch Meßei oder im Gasdruckgewehr zu messen anstreben:

$$\text{IV. } P_m = \frac{p}{q} \frac{4 a^2}{g 27 b} \left( 1 + \frac{\tilde{\omega}}{2 p} \right).$$

Haben wir  $P_m$  und  $v_e$  gemessen, so erhalten wir aus IV. und  $v_e = \frac{a + x_e}{x_e + b}$ , wo  $x_e$  den Weg des Geschosses bis zur Mündung bezeichnet, zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $a$  und  $b$ , und damit von  $\alpha$  und  $\beta$ .

Wir können nun berechnen, wie sich das Pulver in irgendeiner anderen Waffe verhält, und die Rechnung mit der Messung vergleichen. Ehe wir das tun, will ich Sie noch auf eine Modifikation der Leducschen Formeln hinweisen, auf die ich durch ein Versehen gekommen bin.

In den Leducschen Formeln steht ursprünglich statt des Buchstabens  $c$  der Buchstabe  $v_0$  bzw. in einer anderen Notiz  $v_e$ , welcher das Anfangsvolumen, also den anfänglichen Laderaum der Kartusche bezeichnen soll. Da man aber mit  $v_0$  und  $v_e$  häufig die Mündungsgeschwindigkeit bezeichnet, so hatte ich für  $c$  die Mündungsgeschwindigkeit eingesetzt. Eine theoretische Überlegung zeigte jedoch, daß hierdurch ein Widersinn entsteht, denn, wie man leicht sehen kann, würde dann  $b$ , also die Lage des Maximums von  $x_e$ , von dem Endweg des Geschosses, also der Lauflänge abhängen. Nun zeigt aber eine einfache Rechnung, daß, wenn  $b/x_e$  klein ist, das irrtümlich mit  $v_e$  statt  $c$  angenommene Formelsystem auf dasselbe hinauskommt, wenn man

$$b = \beta \left( \frac{a}{p} \right)^{3/8} \left( 1 - \frac{3}{4} \Delta \right)$$

setzt; und hier ist der Einwand über die Abhängigkeit der Größe  $b$  von  $x_e$  nicht mehr vorhanden.

Das von mir erprobte Formelsystem lautet dann

$$\text{I. } v = \frac{a x}{x + b},$$

$$\text{II. } a = \alpha \left( \frac{\tilde{\omega}}{p} \right)^{1/2} \Delta^{1/12},$$

$$\text{III. } b = \beta \left( \frac{a}{p} \right)^{3/8} \left( 1 - \frac{3}{4} \Delta \right).$$

und dieses hat sich dem Leducschen mindestens gleichwertig erwiesen<sup>37)</sup>. Das ist nicht verwunderlich, denn auch Leduc hat für  $b$

verschiedene Formeln probiert, z. B.  $b = \beta_1 \left( \frac{\tilde{\omega}}{p} \right)^{0,3} \frac{1 - \frac{5}{8} \Delta}{\Delta}$ .

<sup>37)</sup> Bollé, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 27, 1932, Heft 7.

Nun will ich zunächst noch auf einen Fehler der Leducschen Formel für  $v$  hinweisen, der grundsätzlicher Natur ist. Die Formel für  $v$  enthält eine Unmöglichkeit. Denn es ist nach ihr:  $\frac{dx}{dt} = \frac{ax}{x+b}$ , also  $dt = \frac{x+b}{ax} dx$ , das würde integriert  $t = \frac{x}{a} + \frac{b}{a} \ln x + c$  ergeben.

Für  $x = 0$  würde  $t = -\infty$  sein, oder man müßte die Konstante  $c = +\infty$  setzen, was aber für endliche Wege keine möglichen Werte von  $t$  ergeben würde. Es ist also die Leducsche Formel widerspruchsvoll. Das tut aber ihrer oft überraschenden empirischen Leistungsfähigkeit keinen Abbruch, und man kann die mathematische Unstimmigkeit beseitigen, wenn man die Zeit nicht von der genauen Ruhelage des Geschosses, sondern von einem gewissen kleinen Anfangsweg des Geschosses ab rechnet. Um dies nicht in jedem Falle besonders zu ermitteln und damit den Formeln ihre Allgemeinheit zu rauben, kann man diesen kleinen Weg in eine allgemeine Beziehung zu  $b$  setzen, das ja den doppelten Weg bis zum Druckmaximum darstellt. Also z. B. die Bedingung hinzufügen, daß für  $x = \frac{b}{1000}$  die Zeit  $t = 0$  sein soll. Wir erleben dann keine Beein-

trächtigung in der Leistungsfähigkeit der Leducschen Formeln. Wir schließen ihre Gültigkeit nur für den absoluten Nullpunkt der Bewegung aus; hierüber weiß man ja weder theoretisch noch empirisch etwas.

Leduc selbst hat sich so geholfen, daß er für  $t$  eine besondere Formel aufstellte, was aber mit der Hauptgleichung für  $v$  nicht in Einklang steht.

Ich will noch erwähnen, daß v. Zedlitz<sup>38)</sup> eine Formel zur Darstellung der Rücklaufmessungen benutzt hat,  $v = \frac{bx^n}{a+x^n}$ , wobei  $10^n = (0,0767 - 2) \left( \frac{\tilde{\omega}}{P_m x_e} \right)^{1/3} \frac{E^{5/4} r^{11/6}}{p}$  und  $P_m$  den Maximaldruck;  $E$  die von einem kg des Pulvers entwickelte Energie,  $p$  das Geschossgewicht in kg und  $r$  den Geschosradius in m bedeutet. Diese Formel stellt zwar die Rücklaufmessungen gut dar, ist aber nicht wie das System von Leduc schon eine allgemeine Lösung des Hauptproblems der inneren Ballistik.

Wir wollen nun die Leducschen Formeln ebenfalls an dem angegebenen Beispiel der Rücklaufmessung für die Patrone  $9,3 \times 74 R$  (Tabelle 4) prüfen.

<sup>38)</sup> v. Zedlitz, Artill. Monatsh. 1910, S. 157.

Für den Geschößweg  $x = 0,068$  m ergibt die Rücklaufmessung eine Geschwindigkeit von  $v = 355$  m/sec und für  $x = 0,43$  m ist  $v = 662$  m, hiermit ergibt sich aus  $v = \frac{ax}{x+b}$ ,  $a = 790,4$  m/sec und  $b = 0,0834$  m, d. h. das Maximum liegt bei  $x_m = 42$  mm in sehr guter Übereinstimmung mit der Rücklaufmessung  $x_m = 41$  mm. Für  $x = 0,186$  m berechnet man  $v = 546$  m/sec, die Rücklaufmessung ergibt  $v = 542$  mm. Für  $x = 0,0005$  m ist  $v = 5$  mm gegen  $v = 8$  m/sec bei der Rücklaufmessung. Dieser Fall wird demnach sehr gut dargestellt.

Aus den Werten für  $a$  und  $b$  liefern nun die Formeln II und III in der von mir benutzten Abwandlung

$$\alpha = 1866 \quad \text{und} \quad \beta = 0,003378.$$

$$(\log \alpha = 3,2709) \quad (\log \beta = 0,5286 - 3).$$

Wir wollen nun mit diesen Pulverkonstanten das Verhalten des Pulvers in einer ganz anderen Waffe berechnen; und zwar für die Patrone  $8 + 57 R$  mit  $\tilde{\omega} = 3,1$  p,  $p = 10$  p,  $c = 3,83$  cm<sup>3</sup> und  $C = 36,36$  cm<sup>3</sup> ( $x_e = 64,8$  mm). Nach den Formeln ergibt sich  $v_0$  zu 880 m/sec und  $P_m$  zu 3495 kp/cm<sup>2</sup>; gemessen wurde  $v_0 = 861$  m/sec und  $P_m = 3495$  kp/cm<sup>2</sup>.

Für  $\tilde{\omega} = 2,5$  p und  $p = 14,7$  p ergibt sich  $v_0$  zu 641 m/sec und  $P_m$  zu 2563 kp/cm<sup>2</sup>; gemessen wurden  $v_0 = 650$  m/sec und  $P_m = 2600$  kp/cm<sup>2</sup>. Es ist also auch hier eine ganz gute Übereinstimmung vorhanden.

Selbst wenn sich die Treffsicherheit der Leduc'schen Formeln in allen Fällen als praktisch hinreichend erweisen sollte, was zuweilen nicht der Fall ist, so wäre hiermit ein Abschluß des Zieles der inneren Ballistik noch nicht (in befriedigender Weise) erreicht. Denn abgesehen davon, daß auch eine hinreichende empirische Darstellung des Tatsachengebietes nicht befriedigt, da wir auch bei etwaigen Abweichungen die Gründe kennen lernen wollen, muß letzten Endes unser Ziel sein, die Wirkung des Pulvers nicht allein aus Versuchen auf dem Schießplatz, sondern allein aus Laboratoriumsversuchen, also durch Untersuchung der Verbrennungsweise des Treibmittels in der Bombe zu berechnen. Von diesem Ziel sind wir heute noch weit entfernt.

Um den Aufbau einer rationellen inneren Ballistik aus den Grundgesetzen zu entwickeln, müssen wir zum Studium der Verbrennungsweise des Pulvers und der Druckentwicklung in geschlossener Bombe übergehen.

## IV. Verbrennungsweise des Pulvers

### 1. Allgemeines

Das erste der Grundgesetze, welches die Druckentwicklung aus den Treibmitteln darstellt, ist das Gesetz über die Größe des Druckes, den eine bestimmte Menge des Teibmittels in einem gasdicht abgeschlossenen Raum entwickeln kann. Die vom alten Schwarzpulver entwickelten Gase sind  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{N}_2$  (etwas  $\text{H}_2\text{S}$  und  $\text{H}_2$ ), außerdem wird ein starker Anteil von festen Rückständen,  $\text{K}_2\text{CO}_3$ ,  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{K}_2\text{S}$ ,  $\text{K}_2\text{S}_2\text{O}_3$ ,  $\text{KCNS}$ ,  $(\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ ,  $\text{C}$  und  $\text{S}$  bei der Zersetzung gebildet, der die starke Rauchentwicklung bedingt. Bei den modernen Treibmitteln handelt es sich vornehmlich um Gase, und zwar  $\text{CO}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  und etwas  $\text{CH}_4$ , während feste Rückstände nicht in Betracht kommen.

Über die Zustandsgleichung dieser Gase und ihrer Gemische bei den Verbrennungstemperaturen dieser Treibmittel, die bis zu  $3000^\circ\text{C}$  ansteigen können und bei Drucken von 3000 Atm. und mehr, wissen wir aus unmittelbaren Versuchen nur wenig.

Clausius hat für unvollkommene Gase die Gleichung

$$P = \frac{R \cdot T}{V - b} - \frac{\varphi(T)}{(V + \beta)^2}$$

für die Beziehung zwischen dem Druck  $P$  und dem Volumen  $V$  bei der Temperatur  $T$  aufgestellt, die sich wie die bekannte van der Waalsche Gleichung

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R \cdot T$$

auf molekularkinetische Betrachtungen stützt. Man hat Grund zu der Annahme, daß  $\varphi(T)$  oder  $a$  in der van der Waalschen Gleichung mit steigender Temperatur stark abnimmt. Man hat daher versucht, für die Zustandsgleichung der aus den Treibmitteln entwickelten Gase die Gleichung

$$P = \frac{R \cdot T}{V - \alpha}$$

anzunehmen, in welcher  $\alpha$  entsprechend den molekularkinetischen Vorstellungen das sogenannte „Kovolumen“ bezeichnet.



Ist bei der Verbrennung von  $\tilde{\omega}$  kp des Treibmittels in einer geschlossenen Bombe von  $c$  Litern Rauminhalt der Enddruck  $P$  und bezeichnet  $T_0$  die Temperatur der Gase, so ist das Volumen der Masseneinheit der Gase, bei vollständiger Vergasung des Treibmittels offenbar  $c/\tilde{\omega}$ , und die oben angenommene Zustandsgleichung lautet dann

$$P = \frac{R T_0}{\frac{c}{\tilde{\omega}} - \alpha} = \frac{R T_0 \frac{\tilde{\omega}}{c}}{1 - \alpha \frac{\tilde{\omega}}{c}}.$$

Man bezeichnet das Verhältnis  $\tilde{\omega}/c$  der Ladung  $\tilde{\omega}$  zu dem ihr bei der Verbrennung zur Verfügung stehenden Raum  $c$  als die „Ladedichte“  $\Delta$  und hat dann

$$P = \frac{R \cdot T_0 \cdot \Delta}{1 - \alpha \Delta} = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}$$

als eine Gleichung zwischen Druck und Ladedichte, die sogenannte Abelsche Gleichung.  $f = R T_0$  wird häufig als „Pulverkraft“ bezeichnet (force =  $f$ ).

Die empirische Bestätigung dieser Gleichung in weiten Grenzen kann aber nicht ohne weiteres als ein Beweis für die Richtigkeit der angenommenen Zustandsgleichung gelten. Denn nachgewiesenermaßen ändert sich die Explosionstemperatur und die Zusammensetzung des Gasgemisches mit der Ladedichte, wenn dann  $R \cdot T_0$  erfahrungsgemäß konstant bleibt, so würde das gegen die genaue Gültigkeit der angenommenen Zustandsgleichung sprechen.

Nach der Ableitung aus der auf das erste Glied reduzierten Clausiusschen Gleichung haben wir

$$f = R T_0 = \frac{P_0 \cdot (V_0 - b)}{273} \cdot T_0,$$

wenn  $P_0$  den Normaldruck und  $V_0$  das Volumen bei  $0^\circ \text{C}$ , d. h.  $T = 273^\circ$  abs. bezeichnet.

Nun ist aber bei der tiefen Temperatur von  $273^\circ$   $b$  sicher klein gegen  $V_0$ , denn hier gelten die idealen Gasgesetze ziemlich genau.

Wir können daher  $R = \frac{P_0 \cdot V_0}{273}$  und somit  $f = \frac{P_0 \cdot V_0}{273} \cdot T_0$  setzen,

wo  $T_0$  die Explosionstemperatur bedeutet. Man kann also  $f$  auch aus der Wärmeentwicklung bei Zersetzung der Treibmittel und einer Analyse der Verbrennungsgase berechnen. Kennt man die Verschiebung der Gaszusammensetzung bei der Abkühlung der Explosionsgase von der Verbrennungstemperatur  $T_0$  auf  $273^\circ$  und den Gang der spez. Wärmen der Gase mit der Temperatur, so kann man  $V_0$  und  $T_0$  aus der Wärmetönung berechnen. Denn ist  $c_{T_0}$

ein von  $T_0$  abhängiger Mittelwert der spez. Wärmen der Explosionsgase, so ist offenbar die bei der Verbrennung entwickelte Wärmemenge  $Q$  mit der Explosionstemperatur durch die Gleichungen

$$c_{T_0} T_0 = Q \quad \text{und} \quad T_0 = \frac{Q}{c_{T_0}}$$

gegeben.

Wenn man unter Berücksichtigung der Verschiebung der Gaszusammensetzung bei der Abkühlung von  $T_0$  auf  $273^\circ$ , aus dem gefundenen Volumen der abgekühlten Gase und ihrer Zusammensetzung dasjenige Volumen  $V_0$  berechnet, das die Gase bei  $273^\circ$  haben müßten, wenn bei der Abkühlung die Gaszusammensetzung dieselbe geblieben wäre wie bei der Explosionstemperatur  $T_0$ , und aus der gefundenen Wärmetönung die bei der Explosion entwickelte Wärme  $Q$  unter Berücksichtigung der bei der Verschiebung der Zusammensetzung (Kondensation von  $H_2O$ ) freiwerdenden Wärme berechnet, so hat man sowohl  $V_0$  als  $T_0$  und kann also auch  $f$  berechnen.

Andererseits kann man auch  $f$  und  $\alpha$  aus der Abelschen Gleichung  $P = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}$  empirisch bestimmen, wenn man in geschlossener Bombe die Drucke für verschiedene Ladedichten mißt.

Erst wenn die beiden Werte von  $f$  übereinstimmen, kann man auch die Zustandsgleichung ermitteln. Wir wollen auf derartige Untersuchungen hier um so weniger eingehen, als für uns in der inneren Ballistik die Abelsche Gleichung  $P = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}$  zunächst einfach als ein empirisch sehr gut fundiertes Grundgesetz für die Druckentwicklung bei der Vergasung der Treibmittel angenommen werden kann. Wolff<sup>39)</sup> hat z. B. für ein Nitroglycerin Pulver gefunden, daß  $f = 10400$  und  $\alpha = 0,741$  ist. In Tabelle 6 sind die gemessenen und berechneten Werte für einige Ladedichten angegeben.

Tabelle 6

$\Delta$	$P$ kp/cm <sup>2</sup> gemessen	$P$ kp/cm <sup>2</sup> berechnet
0,0609	690	689
0,0934	1076	1084
0,1050	1258	1230
0,1507	1832	1833
0,1732	2160	2147

<sup>39)</sup> W. Wolff, Kriegstechn. ZS. 1903, Heft 1.

Schmitz hat in der schon genannten Arbeit mit sehr genauer Druckmessung die Abelsche Gleichung noch in viel weiteren Grenzen sehr gut bestätigt gefunden. Auch durch neuere Arbeiten von Mouraour ist sie als sehr gesichertes Fundament der inneren Ballistik erwiesen.

Der der Abelschen Gleichung entsprechende Maximaldruck wird von dem Treibmittel in einem geschlossenen Raum entwickelt unabhängig von der Form des Treibmittels, wenn man von dem Wärmeabfluß während der Druckentwicklung absieht. Aber die Zeit, in der sich der Druck entwickelt, hängt für gleiche Ladedichten vollständig von der Form ab. Die Gesetze, welche die Verbrennungsdauer regeln, sind noch nicht so durch einwandfreie Versuche begründet, wie die Höhe des Druckes; und es bestehen in der Darstellung der Gesetze namentlich, was die Abhängigkeit der Verbrennungsgeschwindigkeit vom Druck angeht, noch Meinungsverschiedenheiten.

Piobert<sup>40)</sup>, der zuerst die Verbrennungsweise von aus Schwarzpulver geformten Körpern untersucht hat, stellte eine schichtenweise Verbrennung der Körper fest, zog aber eine Abhängigkeit vom Druck nicht in Betracht. Aber gerade beim Schwarzpulver, das ein mechanisches Gemenge aus Salpeter, Schwefel und Holzkohle darstellt, wird bei höheren Drucken die von Piobert angenommene schichtenweise Verbrennung dadurch beeinträchtigt, daß die Körner, aus denen die Pulverkörper bestehen, sehr bald in kleine Elementarkörner zerfallen, die die Regelung der Verbrennung übernehmen. Es war daher schwierig, mit Schwarzpulver auch bei hohen Drucken in schweren Geschützen eine zugleich geregelte und hinreichend langsame Verbrennung zu erreichen. Erst in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wurde durch starkes Pressen des Schwarzpulverstaubes zu festen Kuchen und Zerschlagen der Kuchen in Körner und durch erneutes Pressen der Körner von ausgesiebter Größe in Körper bestimmter (z. B. prismatischer) Form ein bemerkenswerter Fortschritt in bezug auf Verlangsamung und Regelmäßigkeit der Verbrennung erzielt. Das sogenannte prismatische „braune“ Pulver in Deutschland erregte seinerzeit berechtigtes Aufsehen. Aber Vieille wies nach, daß das regulierende Prinzip bei diesen Schwarzpulverkörpern nicht die Form und Dimensionierung der Körper war, sondern der Einfluß der je nach dem Kompressionsgrad bei Herstellung der Körper mehr oder weniger feinen Zwischenräume zwischen den Körpern. Man konnte hierdurch wohl die Verbrennungsdauer regulieren, so daß man diese verdoppeln, verdrei- oder vervierfachen konnte usw.

<sup>40)</sup> Piobert, Traite d'Artillerie théorique et pratique. Paris 1831.

Aber die Verbrennungsdauer ist, wie Vieille zeigte, nicht von der Dicke der aus solchen Körnern gepreßten Platten abhängig, sondern nur eine Funktion der Kompression bei Herstellung der Platten. Erst wenn man zu sehr starken Verdichtungen bei Kompressionen von 3600 kp/cm<sup>2</sup> und mehr übergang, die nur im Laboratorium, aber nicht bei der Großfertigung möglich sind, zeigte sich die Verbrennungsdauer der Dicke der gepreßten Platten proportional. Vieille hatte durch eine geniale geometrische Überlegung gezeigt, daß diese Proportionalität zwischen Dicke der Platten und der Verbrennungsdauer die Bedingung für eine wirklich schichtenweise Verbrennung ist, wie er sie eben bei den ersten von ihm hergestellten (in Äther-Alkohol) gelatinieren Nitrozellulosekörpern nachweisen konnte.

Erst mit Pulvern aus solchen kolloidalen Substanzen konnte man eine Regulierung der Verbrennungsdauer der Treibmittel allein durch die Formgebung erreichen.

## 2. Verbrennungsgesetz von Vieille und Gossot und Liouville

Vieille, dem die Herstellung des ersten brauchbaren rauchschwachen Nitrozellulosepulvers zuzuschreiben ist, hatte in seiner bahnbrechenden Arbeit<sup>41)</sup> die Druckbombe angegeben (Abb. 11), in welcher er die Verbrennungsdauer der Pulver durch die Registrierung des Stauchvorganges eines vom Stempel durch den sich allmählich entwickelten Druck der Pulvergase gestauchten Kupferzylinders feststellte. Er führte zuerst den Begriff der linearen Verbrennungsgeschwindigkeit  $de/dt$  ein, mit welcher bei schichtenweise verbrennenden Stoffen die Verbrennung normal zur Oberfläche fortschreitet und zeigte (Abb. 21), daß diese Geschwindigkeit in jedem Augenblick von dem herrschenden Druck abhängig ist. Er gelangte zu der Formulierung  $de/dt = K \cdot P^\alpha$ , wo  $P$  der zur Zeit  $t$  vorhandene Druck der Pulvergase ist und  $K$  und  $\alpha$  für alle Pulver aus derselben chemischen Substanz Konstanten sind. Für  $\alpha$  fand er den Wert  $2/3$ .

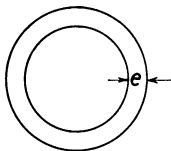


Abb. 21

Wolff<sup>39)</sup> wies dagegen nach, daß  $\alpha$  nicht von der Ladedichte unabhängig ist und zwischen 0,46 und 0,66 schwankt. Aber alle diese mehr oder weniger ins Einzelne gehenden Behauptungen sind heute noch nicht als ganz sicher erwiesen, weil sie auf Grund von Versuchen mit der noch unvollkommenen Registrierung des Druckes durch

<sup>41)</sup> Vieille, Étude Sur Le Mode De Combustion Des Matières Explosives. Mém. Des Poudres 6, 256–391, 1893.

Stauchzylinder aufgestellt wurden. Eine systematische Nachprüfung mit modernen Hilfsmitteln steht noch aus.

Auf jeden Fall kann man auf ein derartiges Verbrennungsgesetz eine rationelle innere Ballistik aufbauen, weil man hierbei keine vollkommen genaue Formulierung braucht und die Koeffizienten daraus entwickelter Gleichungen doch durch die Erfahrung beim Schuß aus der Waffe bestimmen muß.

Gossot und Liouville<sup>42)</sup> haben dies z. B. getan.

Aus dem Ansatz  $de/dt = K \cdot P^\alpha$  folgt, daß, wenn  $w_0$  die Verbrennungsgeschwindigkeit bei einem konstanten Druck  $P_0$  bedeutet, die Verbrennung normal zur Oberfläche des Pulverelements in dem Zeitelement  $dt$  um die Strecke  $w_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt$  fortschreitet. Betrachten wir nun, um eine bestimmte Vorstellung zugrunde zu legen, ein Blatt aus der Pulversubstanz oder einen Streifen, so sind die der Größe nach geordneten ursprünglichen Kanten  $a_1, a_2, a_3$  in dem betrachteten Augenblick  $t$  in

$$a_1 - 2 \int_0^t w_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt,$$

$$a_2 - 2 \int_0^1 w_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt,$$

$$a_3 - 2 \int_0^t w_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt$$

übergegangen. Führen wir die Veränderliche  $y$  ein,

$$y = \frac{2}{a_1} \int_0^t w_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt,$$

so ist das ursprüngliche Volumen  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$  in  $a_1 a_2 a_3 - (a_1 - y a_1)(a_2 - y a_1)(a_3 - y a_1)$  übergegangen.

Der zur Zeit  $t$  vergaste Bruchteil  $F(y)$  des Pulverelements (oder auch der aus den Pulverelementen zusammengesetzten Ladung) ist dann:

$$F(y) = \frac{a_1 a_2 a_3 - (a_1 - y a_1)(a_2 - y a_1)(a_3 - y a_1)}{a_1 a_2 a_3}.$$

Mit

$$\frac{a_1}{a_2} = m; \quad \frac{a_1}{a_3} = n, \quad 1 + m + n = a$$

<sup>42)</sup> Gossot u. Liouville, Balistique intérieure. Paris 1922.

und

$$\lambda = \frac{m + n + mn}{1 + m + n}; \quad \mu = \frac{mn}{1 + m + n}$$

ergibt eine einfache algebraische Rechnung

$$F = F(y) = ay(1 - \lambda y + \mu y^2).$$

Wenn in einer Bombe vom Volumen  $c$  von der ursprünglichen Ladung  $\tilde{\omega}$  der Bruchteil  $\tilde{\omega}F$  vergast ist, so ist der Druck  $P$  nach der Abelschen Gleichung:

$$P = \frac{f \frac{\tilde{\omega}F}{c - \frac{\tilde{\omega}}{\delta}(1 - F)}}{1 - y(x) \frac{\tilde{\omega}F}{c - \frac{\tilde{\omega}}{\delta}(1 - F)}},$$

wenn  $\delta$  die Dichte des festen Pulvers und  $y(x)$  das sogenannte (früher mit  $\alpha$  bezeichnete) Kovolumen der Abelschen Gleichung bedeutet.

Nun ist  $\tilde{\omega}/c$  gleich der Ladedichte  $\Delta$ , und mit Einführung von

$$\frac{(y(x) - 1/\delta)\Delta}{1 - \Delta/\delta} = K_1 \quad \text{und} \quad \frac{f\Delta}{1 - \Delta/\delta} = h$$

erhalten wir

$$P = \frac{h \cdot F(y)}{1 - K_1 \cdot F(y)}.$$

Wenn  $\tau_0$  die Zeit bezeichnet, in welcher das Pulver bei konstantem Druck  $P_0$  (z. B. in der freien Atmosphäre) verbrennt, so ist  $w_0 \tau_0 = a/2$ . Es ist somit

$$y = \frac{2}{a_1} \int_0^t w_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt = \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dt;$$

hieraus folgt

$$\tau_0 \frac{dy}{dt} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha \quad \text{oder} \quad P_0^\alpha \frac{dy}{P^\alpha} = \frac{dt}{\tau_0}.$$

Bei Integration dieser Gleichung links von 0 bis  $y$ , rechts von 0 bis  $t$  ergibt sich unter Berücksichtigung von  $P = \frac{h \cdot F(y)}{1 - K_1 F(y)}$

$$\left(\frac{P_0}{h}\right)^\alpha \int_0^y \left[ \frac{1 - K_1 F(y)}{F(y)} \right]^\alpha dy = \frac{t}{\tau_0}.$$

Die Integration von

$$\int_0^y \left[ \frac{1 - K_1 F(y)}{F(y)} \right]^\alpha dy$$

ist nicht ohne weiteres möglich. Gossot und Lionville haben durch gewisse Substitutionen mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen eine Lösung entwickelt. Auf die Einzelheiten der Durchführung der Rechnung soll hier verzichtet werden.

In erster Annäherung erhalten wir als Lösung

$$\frac{t}{\tau_0} = -\frac{3}{a} \left( \frac{P_0}{h} \right)^{2/3} u,$$

wobei  $u$  aus der elliptischen  $\wp$ -Funktion

$$\wp(u) = 1 - \lambda y + \mu y^2$$

berechnet werden kann.

Es ist klar, daß man aus

$$\frac{t}{\tau_0} = \left( \frac{P_0}{h} \right)^{2/3} \int_0^y \left[ \frac{1 - K_1 F(y)}{F(y)} \right]^{2/3} dy$$

das Integral auch auf graphischem Wege stets genau ermitteln kann, und somit einen Zusammenhang von  $t$  und  $y$  und durch

$P = \frac{hF(y)}{1 - K_1 F(y)}$  zwischen  $t$  und  $P$  erhalten kann.

Gossot und Lionville fanden für einen Fall bei der Registrierung in der Vieilleschen Bombe:

Tabelle 7

$t$ in $10^{-3}$ sec	$P$ kp/cm <sup>2</sup> gemessen	$P$ kp/cm <sup>2</sup> ber. mit $\alpha = 2/3$	$P$ kp/cm <sup>2</sup> ber. mit $\alpha = 1$
0,00	379	379	379
2,59	574	574	564
6,70	960	980	1035
10,10	1300	1320	1390
11,78	1368	1388	1438
14,84	1718	1728	1758
18,89	1940	1945	1945

Aus solchen und ähnlichen Messungen schlossen Gossot und Lionville auf die Überlegenheit der Annahme  $\alpha = 2/3$  gegenüber dem Exponenten  $\alpha = 1$ .

Aber selbst wenn diese bei der Formulierung des Verbrennungsgesetzes durch  $de/dt = KP^\alpha$  für  $\alpha = 2/3$  entscheiden, so bleibt doch die Frage, ob bei einer anderen Formulierung, wie z. B. diejenige von Charbonnier nicht eine andere Potenz des Druckes die Dinge besser darstellt, dies werden wir bestätigt finden.

### 3. Das Verbrennungsgesetz von Charbonnier

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Masse des Pulverelements sich beim Brennen verringert,  $dz/dt$ , oder der Bruchteil  $z$  der Ladung  $\tilde{\omega}$ , welcher verbrannt ist, hängt vom jeweils herrschenden Druck  $P$  und von der brennenden Oberfläche  $S$  ab.

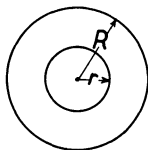


Abb. 22

Charbonnier setzt nun

$$\frac{dz}{dt} = A \cdot S \cdot P^\alpha.$$

Nun ist offenbar die jeweilige Oberfläche des brennenden Elements (oder auch der Ladung) eine Funktion des bereits verbrannten Bruchteils  $z$  und der ursprünglichen Oberfläche  $S_0$ ; demnach ist  $S = \varphi(z) S_0$ , wenn eine regelmäßige Verbrennung stattfindet.

Man kann die Formfunktion  $\varphi(z)$  in einigen Fällen aus rein geometrischen Betrachtungen ableiten.

Betrachten wir z. B. eine Kugel vom Radius  $R$ , die von außen nach innen brennt. Ihr ursprüngliches Gewicht ist  $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$ , wenn  $\delta$  das spezifische Gewicht des festen Pulverkörpers ist. Zur Zeit  $t$  ist das Gewicht, da die Kugel nunmehr den Radius  $r$  hat,  $Q_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta$ . Es ist also ein Gewicht  $q = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \delta$  verbrannt. Der verbrannte Bruchteil  $z$  ist dann  $q/Q = z = 1 - (r/R)^3$ . Die ursprüngliche Oberfläche war  $S_0 = 4 \pi R^2$ , die augenblicklich brennende Oberfläche ist  $S = 4 \pi r^2$ . Es ist also  $S = S_0 (r/R)^2$ . Nun folgt aus  $1 - (r/R)^3 = z$ , daß  $r/R = (1 - z)^{1/3}$  und  $(r/R)^2 = (1 - z)^{2/3}$ . Demnach ist  $S = S_0 (1 - z)^{2/3}$  und

$$\varphi(z) = (1 - z)^{2/3}.$$

Für einen Würfel findet man die gleiche Funktion. Die Oberfläche nimmt mit der Verbrennung ab. Solche Pulverformen nennt Charbonnier „degressiv“. Er setzt allgemein

$$\varphi(z) = (1 - z)^\beta,$$

indem er bemerkt, daß das Pulver niemals genau den Elementen entsprechend verbrennt, da durch die Berührung der einzelnen Teile die Verbrennung modifiziert wird; er schlägt vor,  $\beta$  durch Versuche in der Bombe zu bestimmen.

Betrachten wir eine Kugel, die von innen nach außen brennt, was allerdings schwer zu realisieren ist, so ist

$$z = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad \text{und} \quad S = S_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 = S_0 z^{2/3},$$

$$\varphi(z) = z^{2/3};$$



hier nimmt also  $\varphi(z)$  mit  $z$  zu. Solche Pulver nennt Charbonnier „progressiv“. Z. B. bei einem Hohlzylinder mit sehr feiner Bohrung ist  $Q = \pi R^2 h \delta$ ,  $z = \left(\frac{r}{R}\right)^2$  und  $S = S_0 \left(\frac{r}{R}\right)$ , also

$$\varphi(z) = z^{1/2}.$$

Charbonnier setzt allgemein

$$\varphi(z) = z^{\beta_1}$$

für progressive Pulver.

Bei sehr vielen Pulverformen, beispielsweise bei den meisten Streifen- und Röhrenpulvern, bleibt die Oberfläche nahezu konstant, also

$$\varphi(z) = 1.$$

Solche Pulver stehen an der Grenze beider Formen.

Ist  $S$  die zur Zeit  $t$  brennende Oberfläche des Gase entwickelnden Treibmittels und bezeichnet man mit  $w$  die Geschwindigkeit, mit der der Abbrand normal zur Oberfläche fortschreitet, so verbrennt in dem Zeitelement  $dt$  offenbar die Menge

$$dq = S \cdot w \cdot dt \cdot \delta = S_0 \cdot \varphi(z) w \cdot \delta \cdot dt;$$

nun ist aber  $z = \frac{q}{Q}$  und  $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{S_0 \cdot \varphi(z) w \cdot \delta}{Q}$ ,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S_0 \cdot \delta \cdot w}{Q} \varphi(z).$$

Nimmt man nun mit Vieille  $w = w_0 \cdot \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha$  an, wo  $w_0$  die Verbrennungsgeschwindigkeit bei einem konstanten Druck  $P_0$  ist, so folgt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S_0 \delta w_0}{Q P_0^\alpha} P^\alpha \varphi(z)$$

oder

$$\frac{dz}{dt} = A P^\alpha \varphi(z).$$

Die nun eingeführte Konstante  $A$  (für ein und dasselbe Pulver) besitzt hiernach den Wert

$$A = \frac{S_0 \delta w_0}{Q P_0^\alpha}.$$

Versteht man unter  $w_0$  die Verbrennungsgeschwindigkeit beim Einheitsdruck  $P_0 = 1$ , so ist  $A = \frac{S_0 \delta w_0}{Q}$ . Da die Verbrennungsgeschwindigkeit  $A$  proportional ist, bezeichnet man  $A$  als die Lebhaftigkeit des Pulvers.

$A$  hängt mit  $w_0$  und  $\delta$  von der Substanz ab und ist bei gleicher Substanz um so größer, je mehr Oberfläche das Pulver pro Gewichtseinheit  $S_0/Q$  besitzt.

Wir betrachten wieder den Abbrand des Pulvers in geschlossener Bombe vom Volumen  $c$ , die Ladung sei  $\tilde{w}$ .

Zur Zeit  $t$  ist  $\tilde{w}z$  verbrannt, der Raum, der den Gasen zur Verfügung steht, ist  $c = \frac{(1-z)\tilde{w}}{\delta}$ . Nach der Abelschen Gleichung ist also

$$P = \frac{f \frac{\tilde{w}z}{c - (1-z)\tilde{w}/\delta}}{1 - \eta \frac{\tilde{w}z}{c - (1-z)\tilde{w}/\delta}} = \frac{f\tilde{w}z}{c - \frac{\tilde{w}}{z}(1-z) - \eta\tilde{w}z + \eta\tilde{w} - \eta\tilde{w}}$$

$$P = \frac{f\tilde{w}z}{c - \eta\tilde{w}(1-z)\left(\eta - \frac{1}{\delta}\right)\tilde{w}}$$

Wenn man bedenkt, daß das Glied  $(1-z)\left(\eta - \frac{1}{\delta}\right)\tilde{w}$  immer ein kleiner Bruchteil von  $\tilde{w}$  ist, so kann man durch geeignete, von der ursprünglichen Definition von  $\eta$  etwas abweichende Wahl der Konstanten  $\eta$  schreiben

$$\text{I. } P = \frac{f\tilde{w}z}{c - \eta\tilde{w}} = P_m z.$$

Betrachten wir ein degressives Pulver, so haben wir die beiden Gleichungen

$$1. \quad P = P_m z$$

und

$$2. \quad \frac{dz}{dt} = A(1-z)^\beta P^\alpha;$$

durch Elimination von  $z$  ergibt sich

$$\frac{dP}{dt} = A P_m^{(1-\beta)} (P_m - P)^\beta P^\alpha.$$

Für  $\frac{dP}{dt} = 0$  erhalten wir  $P = 0$  und  $P = P_m$ , d. h. die Kurve hat

einen Wendepunkt bei  $P = P_i$ ; an ihm ist  $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ , also

$$\alpha P_i = \beta (P_m - P_i) \quad \text{oder} \quad P_i = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} P_m.$$

Für ein progressives Pulver hat man

1.  $P = P_m z$ ,
2.  $\frac{dz}{dt} = A z^{\beta_1} P^\alpha$ ,

also

$$\frac{dP}{dt} = A P_m^{1-\beta_1} P^{\alpha+\beta_1};$$

$\frac{dP}{dt} = 0$  ergibt nur eine Lösung  $P = 0$ . Die Kurve hat keinen Wendepunkt.

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_m = A P_m^{1+\alpha}.$$

Durch Auswertung der Verbrennungskurven können die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  leicht berechnet werden. Aus solchen Versuchen entschied sich Charbonnier für  $\alpha = 1$ .



Abb. 23. Druck-Zeitkurve beim Abtrennen eines degressiven Pulvers in der Verbrennungsbombe



Abb. 24. Druck-Zeitkurve beim Abtrennen eines progressiven Pulvers in der Verbrennungsbombe

Natürlich bedürfen auch diese Versuche noch einer systematischen Nachprüfung durch moderne Mittel.

Es gibt aber ein verhältnismäßig einfaches Mittel, den Ansatz von Charbonnier für  $\alpha = 1$  experimentell nachzuprüfen.

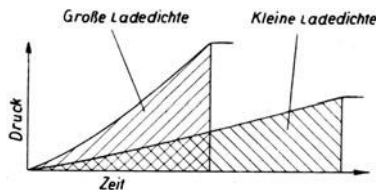


Abb. 25. Druck-Zeitkurven des gleichen Pulvers bei verschiedener Ladedichte. Der Flächeninhalt ( $\int P dt$ ) beider Kurven ist gleich

Aus  $dz/dt = A \varphi(z) P$  folgt

$$\int_0^t P dt = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{dz}{\varphi(z)},$$

d. h. der Flächeninhalt der Druck-Zeitkurve vom Beginn bis zur vollständigen Verbrennung muß für ein und dasselbe Pulver [gleiches  $\varphi(z)$  und gleiches  $A$ ] in der Bombe für alle Ladedichten konstant bleiben.

Cranz<sup>43)</sup> (Tabelle 8) hat diesen Satz an den Originalkurven von Schmitz untersucht:

Tabelle 8

	I	II	III	IV	V
Ladung $\tilde{w}$ in kp. . . . .	0,4	0,6	0,7	0,75	0,8
Laderaum $C$ in Litern	3,24	3,24	3,23	3,23	3,45
$P_m$ kp/cm <sup>2</sup> . . . . .	1380	2230	2740	2960	2960
$A$ . . . . .	0,124	0,185	0,216	0,232	0,232
$t$ in sec/1000 . . . . .	36	30	24	22	25
$\int_0^t P dt$ . . . . .	15,00	15,00	15,25	15,55	15,65
$\int_0^t P^{2/3} dt$ . . . . .	18,03	16,38	15,42	15,25	15,52

Man sieht, daß hier der Exponent  $\alpha = 1$  den Tatsachen weit besser entspricht als  $\alpha = 2/3$ . Bei der von Gossot und Liouville angenommenen Formulierung des Verbrennungsgesetzes war es umgekehrt, der Unterschied zwischen den beiden Exponenten aber bei weitem nicht so ausgeprägt.

Jedenfalls zeigt sich der Ansatz von Charbonnier

$$\frac{dz}{dt} = A \varphi(z) P$$

als eine brauchbare Grundlage zur Aufstellung einer rationellen inneren Ballistik.

<sup>43)</sup> Cranx, Lehrbuch der Ballistik 2, 134–135, 1926.

## V. Lösung des inner-ballistischen Hauptproblems durch geschlossene Formelsysteme

### 1. Allgemeine und geschichtliche Darstellung

Wir gehen nun zur Formulierung und Lösung des Hauptproblems der inneren Ballistik über, die wir auf Grund der beiden Darstellungen der Verbrennungsgesetze des Pulvers verfolgen wollen.

Schon Résal hatte in seiner 1864 erschienenen Schrift<sup>44)</sup> vom Energieprinzip ausgehend eine der Hauptgleichungen für die Geschößbewegung aufgestellt. Zu der Energiegleichung eine Gleichung über die Verbrennungsweise des Pulvers hinzufügend, erwarb sich Sarrau das Verdienst der ersten vollständigen Formulierung der Differentialgleichung für die Geschößbewegung im Rohr<sup>45)</sup>.

Wir können die aus der Anwendung des Energieprinzips gefolgerte Gleichung auf folgendem Wege gewinnen:

Ist  $Q$  die an das Metall des Rohres bzw. Laufes bis zur Zeit  $t$  übergegangene Wärmemenge,  $r$  die bis zu dieser Zeit zur Überwindung der Widerstände gegen die Geschößbewegung verbrauchte Energie,  $E$  das mechanische Wärmeäquivalent,  $m$  die Geschößmasse, zu der ein Teil  $\delta$  der bewegten Gase gerechnet werden muß, und  $v$  die Geschößgeschwindigkeit, so ist die zur Zeit  $t$  dem Pulver entzogene Energie

$$E(Q + r) + \frac{1}{2} m v^2,$$

wobei  $m = \frac{p + \delta \tilde{\omega}}{g}$  aus Geschößgewicht  $p$  und Ladung  $\tilde{\omega}$  gebildet ist ( $g$  ist die Schwerebeschleunigung).

Ist  $T$  die Temperatur der Pulvergase zur Zeit  $t$  und  $T_0$  die Explosionstemperatur, so haben die vom verbrannten Bruchteil  $\tilde{\omega} \psi(t)$  der Pulverladung  $\tilde{\omega}$  herrührenden Gase die Energie  $E \cdot c_v \cdot (T_0 - T) \tilde{\omega} \psi(t)$  hergegeben, wenn  $c_v$  einen geeigneten Mittelwert der spezifischen Wärme der Gase im Temperaturbereich  $T_0 - T$  bedeutet.

---

<sup>44)</sup> Résal, Recherches sur le mouvement des projectiles dans les armes à feu. 1864.

<sup>45)</sup> Sarrau, Nouvelles recherches sur les effets de la poudre dans les armes. Mém. de l'Art. de la Marine. Tome IV, 1876.

Wir haben somit die Gleichung

$$E c_v \cdot (T_0 - T) \tilde{\omega} \psi(t) = E(Q + r) + \frac{1}{2} m v^2.$$

Nun wird von fast allen Theoretikern der inneren Ballistik ein Sprung gemacht. Das Glied  $E(Q + r)$  wird vernachlässigt. Gossot und Liouville führen aus, daß nur eine dünne Haut der inneren Rohrwandung auf wirklich hohe Temperaturen kommt, und daß  $(E \cdot r)$  nur einen geringen Teil der Geschoßenergie ausmacht. Beides ist für Geschütze besser zutreffend als für Gewehre.

Für letztere liegt nach Cranz und Rothe<sup>46)</sup> die Energiebilanz etwa folgendermaßen. Bei 3,2 p Pulverladung und einem 10 p schweren Geschoß entspricht die lebendige Kraft von 384 kpm einer Wärmemenge von 905 cal. Die gesamte bei der Verbrennung von 3,2 p frei werdende Energie beträgt 2762 cal. Auf den Lauf gehen beim Schuß nach den Messungen von Cranz und Rothe etwa 620 cal über. Es verpufft also eine Energie von 1230 cal in die Luft. Diese berührt unser Problem und die obige Energiegleichung nicht, da nur die Vorgänge während der Geschoßbewegung im Lauf erfaßt werden ( $t$  und  $T$  sind die Werte beim Geschoßaustritt). Die auf den Lauf übergegangenen 620 cal, die sich aus der Geschoßreibung  $Er$  und der Wärmeabgabe der Pulvergase  $EQ$  zusammensetzen, gehen nicht ganz in unsere Energiegleichung ein, denn der Anteil  $EQ$  wird dadurch vergrößert, daß noch lange nach dem Geschoßaustritt heiße Gase mit dem Lauf in Berührung stehen. Der Reibungsanteil  $Er$  bezieht sich ganz auf die Reibung im Lauf und ist nach neueren Messungen keineswegs gegenüber der Geschoßenergie  $\frac{1}{2} m v^2$  zu vernachlässigen.

Wir müssen daher bei Vernachlässigung von  $E(Q + r)$  in unserer Energiegleichung entweder einen idealen Fall ohne Reibung und Wärmeabfluß voraussetzen, oder den Teil  $E(Q + r)$  dadurch aufzuwiegen suchen, daß wir für  $c_v$  einen kleineren Wert annehmen als den der Definition entsprechenden, so daß  $\tilde{\omega} \psi(t) E(T_0 - T) c_v$  demjenigen den Pulvergasen entzogenen Teil der Energie entspricht, der sich in die lebendige Kraft des Geschosses und der Pulvergase umsetzt. Unter diesen Vorbehalten können wir also, bei geeigneter Wahl von  $c_v$  als einer rein empirischen Konstanten unsere Energiegleichung folgendermaßen schreiben

$$1. \quad \frac{1}{2} m v^2 = E c_v (T_0 - T) \tilde{\omega} \psi(t).$$

<sup>46)</sup> Cranz u. Rothe, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1908, S. 308, 327, 474.

Der Druck  $P$  ist zur Zeit  $t$  nach der Abelschen Gleichung, da die Pulvergase zur Zeit  $t$  nicht die Temperatur  $T_0$ , sondern die Temperatur  $T$  besitzen,

$$2. \quad P = \frac{P_0 T_0}{273} \frac{T \tilde{\omega} \psi(t)}{C - \eta \tilde{\omega}},$$

wenn  $C$  der zur Zeit  $t$  zwischen Rohr und Geschosßboden liegende Raum ist. Eliminieren wir  $T$  aus 1. und 2., so erhalten wir

$$\frac{1}{2} m v^2 = E c_v T_0 \tilde{\omega} \varphi(t) - E c_v P (C - \eta \tilde{\omega}) \frac{273}{P_0 V_0},$$

oder wenn wir  $f$  jetzt nicht mehr veränderlich, sondern der Pulverkonstante  $f = \frac{P_0 V_0}{273} T_0$  entsprechend wählen,

$$P (C - \eta \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} m v^2 \frac{P_0 V_0}{273 E c_v} = f \tilde{\omega} \psi(t).$$

Nun ist

$$\frac{P_0 V_0}{273 \cdot E} = c_p - c_v = c_v (K - 1).$$

Wir haben somit

$$P (C - \eta \tilde{\omega}) + \frac{(K - 1)}{2} m v^2 = f \tilde{\omega} \psi(t).$$

Um den verschiedenen Abweichungen der tatsächlichen von der idealen Energiebilanz Rechnung zu tragen, da ja  $c_v$  keineswegs mehr der spezifischen Wärme entspricht, sondern eine geeignete empirische Konstante ist, führen wir an Stelle von  $K$  eine empirische Konstante  $\gamma$  ein.

Nun ist  $Pq = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ , wenn in  $C = c + qx$   $x$  den Geschosßweg bedeutet, und  $c$  den ursprünglichen Laderaum bezeichnet. Somit wird

$$I. \quad \frac{1}{q} (c + qx - \eta \tilde{\omega}) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{f \tilde{\omega} \psi(t)}{m}.$$

## 2. Lösung von Gossot und Liouville

Bei der Behandlung der Verbrennung des Pulvers nach Gossot und Liouville war

$$y = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{2/3} dt,$$

und da  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = Pq$ , wird

$$y = \frac{1}{\tau P_0^{2/3}} \int_0^{\tau} \left( \frac{m}{q} \frac{d^2 x}{dt^2} \right)^{2/3} dt.$$

Daraus folgt

$$\text{II. } \frac{1}{\tau} \frac{dy}{dt} = \left( \frac{m}{q} \frac{d^2x}{dt^2} \right)^{2/3};$$

da  $\psi(t) = ay(1 - \lambda y + \mu y^2) = F(y)$ , so haben wir

$$\text{I. } \frac{1}{q} (c + qx - \eta \tilde{\omega}) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{f\tilde{\omega}}{m} F(y).$$

Durch I und II ist das Problem vollständig bestimmt, wenn wir noch die Anfangsbestimmung für  $t = 0$  hinzufügen, denn die beiden Gleichungen ergeben  $x$  als Funktion von  $t$ . Das System ist aber sehr schwierig zu lösen und es ist daher nicht einfach, aus ihm allgemeine Schlüsse zu ziehen. Gossot und Liouville haben es durch eine Reihe von Transformationen in bemerkenswerter Weise vereinfacht.

Während des Weltkrieges und nach ihm haben sie ihr Formelsystem auf Grund der großen ballistischen Erfahrungen einer Überarbeitung unterzogen. Auf die Entwicklung der Formeln selbst wird hier verzichtet, ich verweise auf das Buch von Gossot und Liouville<sup>47)</sup>. Es werden nur die endgültigen Formeln angegeben. Darin bedeuten:

- $v$  Geschößgeschwindigkeit,
- $P$  Gasdruck,
- $\tilde{\omega}$  Gewicht der Ladung,
- $p$  Geschößgewicht,
- $s$  Geschößweg,
- $\eta$  Kovolumen der Pulvergase,
- $c$  ursprünglicher Verbrennungsraum,
- $\delta = \tilde{\omega}/(c - \eta\tilde{\omega})$  Ladedichte,

$$C = c + \frac{d^2\pi}{4} s \text{ Raum zwischen Geschöß- und Rohrboden,}$$

$$\sigma = C - \eta\tilde{\omega} \text{ und } \sigma' = c - \eta\tilde{\omega},$$

$$\varphi \text{ und } \Theta \text{ Pulverkonstanten.}$$

Es gelten dann folgende Beziehungen:

$$1. \quad v^2 = A r l z F(x),$$

wobei  $z = \frac{\tilde{\omega}}{p}$ ;  $\log A = 9,1600$ ;  $l = \log \frac{C - \eta\tilde{\omega}}{c - \eta\tilde{\omega}} = \log \frac{\sigma}{\sigma'}$ ; und

$$\left( \frac{x}{B} \right)^4 = \zeta_0 l^{3/2} \text{ mit } \log B = 0,3456 - 2. \text{ Ferner ist } \zeta_0 = \varphi^{1/2} \left( \frac{p}{d^2} \frac{1}{\Theta} \right)^3 \left( \frac{\tilde{\omega}}{p} \right)^{3/2}.$$

<sup>47)</sup> Gossot u. Liouville, *Ballistique intérieure*. Paris 1922.



Die Gleichungen für  $F(x)$  und  $r$  sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Tabelle 9

$x$	$F(x)$
$0 < x < 0,1561$	$F(x) = \gamma_1 x$ mit $\log \gamma_1 = 0,9676$
$x = 0,1561$	$\log F(x) = 0,1609 - 1$
$0,1561 < x < 0,5202$	$F(x) = \gamma_2 (1 - \beta'/x)$ mit $\log \gamma_2 = 0,3995$ und $\log \beta' = 0,0172 - 1$
$x = 0,5202$	$\log F(x) = 0,3510 - 1$
$0,5202 < x < 1$	$F(x) = \gamma_3 x^{1/8}$ mit $\log \gamma_3 = 0,3865 - 1$
$x = 1$	$\log F(x) = 0,3865 - 1$

Tabelle 10

$l$	$r$
$l < 1$	$r = 1$
$1 < l < 1,2$	$r \cdot l = 1$
$1,2 < l < 1,35$	$l - r = i \sin^{1/2} [400(l-1)]$ mit $\log i = 0,1000 - 1$ (der Winkel $[400(l-1)]$ ist in Graden gerechnet)
$1,35 < l < 1,5$	$(r+l-2)(r-0,85) = c$ mit $\log c = 0,1057 - 3$ oder $r - 0,85 = \sqrt{c \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}$ mit $\operatorname{tg} \psi = \frac{\lambda \sqrt{c}}{l - 1,15}$

Die Druckformel wird

$$2. \quad P_m = \varphi H \delta \zeta_0^n,$$

wobei für  $H$  und  $n$  folgende Beziehung gilt:

$$\begin{array}{ll} 0 < \log \zeta_0 < 3,72 & n = 1/3 \text{ und } \log H = 4,17, \\ 3,72 < \log \zeta_0 < 4,88 & n = 1/4 \text{ und } \log H = 4,48, \\ 4,88 < \log \zeta_0 & n = 1/8 \text{ und } \log H = 5,09. \end{array}$$

$$\text{Ist } z = \frac{\tilde{\omega}}{p} < \frac{1}{2}, \text{ so geht } p \text{ in } p' = p \left( 1 + \frac{3}{11} \frac{\tilde{\omega}}{p} \right), z \text{ in } z' = \frac{z}{1 + \frac{3}{11} z}$$

$$\text{und } \zeta_0 \text{ in } \zeta_0' = \zeta_0 \left( 1 + \frac{3}{11} \frac{\tilde{\omega}}{p} \right) \text{ über; } x, \text{ das ja durch } \left( \frac{x}{B} \right)^4 = \zeta_0 l^{3/2}$$

$$\text{definiert war, wird } x' \text{ nach der Gleichung } \left( \frac{x'}{B} \right)^4 = \zeta_0' l^{3/2}.$$

Die Daten der Waffe sind  $d$ ,  $c$  und  $C$ , und die der Ladung  $\tilde{\omega}$ ,  $p$ ,  $1/\Theta$  und  $\varphi$ .

Die ballistischen Funktionen sind  $v$ ,  $P_m$  und  $F(x)$ ;  $x$ ,  $\delta$  und  $l$  sind aus den Daten der Ladung und der Waffe gegeben durch

$$\delta \zeta_0 = \varphi^{1/2} \left( \frac{p}{d^2} \frac{1}{\Theta} \right)^3 z^{3/2} \quad \text{mit} \quad z = \frac{\tilde{\omega}}{p},$$

$$l = \log \frac{C - \eta \tilde{\omega}}{c - \eta \tilde{\omega}} = \log \frac{\sigma}{\sigma'}$$

und

$$\left( \frac{x}{B} \right)^4 = \zeta_0 l^{3/2} \quad \text{mit} \quad \log B = 0,3456 - 2.$$

Für das Maximum des Druckes ist der Geschößweg durch  $\log \frac{\sigma_m}{\sigma'} = 1,6 - \frac{1}{3} \log \zeta_0$  bestimmt.

Ich habe die weitgehende Brauchbarkeit des Systems in früheren Veröffentlichungen bereits dargetan<sup>48)</sup>.

Es sei der Gebrauch dieses Formelsystems an einigen Beispielen erläutert und zugleich ein Bild von dem Grade der Annäherung gegeben, mit welchem es die Tatsache darzustellen gestattet.

Für die F.K. 16 wurden für ein und dasselbe Röhrenpulver R.P. 38 drei verschiedene Ladungen und zwei verschiedene Geschößgewichte verwendet.

Die Daten sind nach Rohne<sup>49)</sup> in folgender Übersicht zusammengestellt.

Tabelle 11. F. K. 16

Fall I	Fall II	Fall III
$d = 0,77$ dm	$d = 0,77$	$d = 0,77$
$c = 1,40$ Liter	$c = 1,40$	$c = 1,24$
$C = 11,23$ Liter	$C = 11,235$	$C = 11,235$
$p = 6,25$ kp	$p = 6,25$	$p = 5,85$
$\tilde{\omega} = 0,8$ kp R. P. 38	$\tilde{\omega} = 0,48$	$\tilde{\omega} = 0,8$
$v = 570$ m/sec	$v = 430$	$v = 602$
$P_m = 2170$ kp/cm <sup>2</sup>	$P_m = 1240$	$P_m = 2376$

Man berechnet für jeden der drei Fälle die Größen  $l$ ,  $z$  und  $\delta$ , und kann dann für einen angenommenen Wert der Pulverkonstanten  $\varphi$

<sup>48)</sup> Bollé, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1932, Heft 7, 8, 9 und 1939, Heft 8.

<sup>49)</sup> Rohne, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 27, 260, 1932, Heft 8.

(z. B. für  $\varphi = 1,2$ ) aus Gleichung I den entsprechenden Wert von  $F(x)$  berechnen. Aus der Tabelle 9 ergibt sich der zugehörige Wert von  $x$  und aus der Definitionsgleichung von  $x$  der Wert  $\zeta_0$ , und hieraus der Druck  $P_m$  nach Formel 2. Die Bestimmungsgleichung für  $\zeta_0$  liefert dann den Wert für  $\log 1/\Theta$ .

Führt man nach Annahme des Wertes für  $\varphi = 1, 2$  für jeden der drei Fälle die Rechnung durch, so erhält man etwas verschiedene Werte für  $\log 1/\Theta$ . Bezeichnet man den Mittelwert aus den drei Fällen mit  $\log 1/\Theta_m$ , so kann mit den Pulverkonstanten  $\Theta_m$  und  $\varphi$

$$\log 1/\Theta_m = 0,5184 \quad \text{und} \quad \varphi = 1,2$$

aus den gegebenen Daten der Waffe und der Ladung die Mündungsgeschwindigkeit und der Druck berechnet werden.

Es liefert nämlich die Formel  $\delta\zeta_0 = \varphi^{1/2} \left( \frac{\rho}{d^2} \frac{1}{\Theta_m} \right)^3 z^{3/2}$  für jeden der drei Fälle den Wert von  $\zeta_0$ . Hieraus ergibt sich aus  $\left( \frac{x}{B} \right)^4 = \zeta_0 l^{3/2}$  der entsprechende Wert von  $x$  und somit aus den Formeln für  $F(x)$  der jeweilige Wert dieser Funktion. Die Formel 1 liefert die Geschwindigkeit  $v$  und die Formel 2 den Wert von  $P_m$ .

Die Ergebnisse der Rechnung sind mit den angegebenen Werten von  $v$  und  $P_m$  zusammengestellt, wobei für die aus der Stauchtabelle nach Eichung mit der Hebelpresse gewonnenen Drucke eine Korrektur angebracht wurde [nach Burlot<sup>50)</sup>], da die Formeln natürlich für absolute Drucke gelten.

Tabelle 12

Fall	$v$ m/sec berechnet	$v$ m/sec angegeben	$P_m$ kp/cm <sup>2</sup> berechnet	$P_m$ kp/cm <sup>2</sup> angegeben
I	562	570	2470	2450
II	431	430	1100	1240
III	609	602	2900	2700

Angesichts der Unsicherheit, mit der die experimentellen Daten noch behaftet sind, kann man die Übereinstimmung als recht befriedigend bezeichnen. Man könnte die Übereinstimmung noch weiter treiben, wenn man auch den Wert  $\varphi$  noch als Mittelwert aus allen drei Fällen berechnet, so daß aus dem Wert von  $v$  der angegebene Wert von  $P_m$  folgt. Es hat dies aber vorläufig noch keinen Zweck,

<sup>50)</sup> Burlot, Mém. des poudres 3, 255–315, 1923.

ehe nicht die angegebenen Werte einer kritischen Prüfung unterworfen sind. Denn selbst der richtige Wert von  $v$  ist nicht einfach festzustellen. Wenn auch die Messung von  $v$  recht genau erfolgen kann, so hat die Angabe eines typischen Wertes von  $v$  nur einen Sinn als Mittelwert für eine große Zahl möglichst normaler Geschütze. Besonders genau müßten auch noch die Werte des anfänglichen Verbrennungsraumes  $c$  geprüft werden, da die Formeln entsprechend der Erfahrung sehr empfindlich für kleine Veränderungen von  $c$  sind.

Es sei noch ein zweiter Fall mit einem ganz andersartigen Pulver, dem W. P.  $4 \times 4 \times 1$ , in einem Steilfeuergeschütz der I. F. H. betrachtet.

Die Daten für die drei verschiedenen Ladungen sind nachfolgend zusammengestellt.

Tabelle 13. I. F. H.

I	II	III
$d = 1,05 \text{ dem}$	$d = 1,05 \text{ dem}$	$d = 1,05 \text{ dem}$
$c = 0,95 \text{ dem}^3$	$c = 0,95 \text{ dem}^3$	$c = 0,95 \text{ dem}^3$
$C = 9,473 \text{ dem}^3$	$C = 9,473 \text{ dem}^3$	$C = 9,473 \text{ dem}^3$
$p = 15,8 \text{ kp}$	$p = 15,8 \text{ kp}$	$p = 15,8 \text{ kp}$
$\bar{\omega} = 0,37 \text{ kp}$	$\bar{\omega} = 0,215 \text{ kp}$	$\bar{\omega} = 0,155 \text{ kp}$
$v = 301 \text{ m/sec}$	$v = 214 \text{ m/sec}$	$v = 172 \text{ m/sec}$
$P_m = 2226 \text{ kp/cm}^2$	$P_m = 1054 \text{ kp/cm}^2$	$P_m = 690 \text{ kp/cm}^2$

Es wurde hier für jeden der drei Fälle der geeignetste Wert von  $\varphi$  und  $\log 1/\Theta$  berechnet. Mit den erhaltenen Mittelwerten  $\varphi = 1,35$  und  $\log 1/\Theta_m = 0,8817$  kommt man zu folgendem Ergebnis:

Tabelle 14

Fall	$v$ m/sec berechnet	$v$ m/sec gemessen	$P_m$ kp/cm <sup>2</sup> berechnet	$P_m$ kp/cm <sup>2</sup> gemessen
I	295	300	2482	2476
II	220	214	1111	1124
III	185	172	725	710

Die Übereinstimmung zwischen Formeln und Tatsachen ist in großen Zügen hier zutreffend. Es findet aber eine systematische Abweichung in dem Sinne statt, daß die tatsächlichen Geschwindigkeiten für kleine Ladungen geringer sind, als nach den Formeln zu erwarten. Wäre eine solche Abweichung allgemein, so könnte man

ihr leicht Rechnung tragen, indem man in der Formel für  $v^2$  einen Faktor  $\varepsilon$  einführt, der mit  $\delta$  abnimmt und sich für große Werte der Ladung dem Wert 1 nähert. Es ist klar, daß man so eine vollständige Übereinstimmung zwischen Formeln und Tatsachen erhalten kann.

Diese Rechnung und die Anpassung der Formeln an die Tatsachen empfiehlt sich aber erst, wenn die Daten für das ganze Gebiet der Geschütze vorliegen, kritisch gesichtet und Einzelfälle, in denen noch keine Übereinstimmung besteht, gesondert untersucht werden. Es fehlen hier vielfach noch genaue Angaben über die anfänglichen Verbrennungsräume  $c$  und das totale Rohrvolumen  $C$ , die Ladungen, die Art des Pulvers, die Werte von  $v$  und von  $P_m$ .

Ehe nicht eine Sammlung möglichst vieler Fälle und besonders solcher vorliegt, in denen Versuchsbeschüsse mit ein und demselben Pulver in verschiedenen Kalibern und unter möglichst verschiedenen Bedingungen durchgeführt und der Versuch einer Ausmerzung der Unstimmigkeiten durch ihr gesondertes Studium gemacht ist, läßt sich ein abschließendes Urteil über die Möglichkeit, das Tatsachengebiet durch die Formeln zu beherrschen, noch nicht fällen.

Für das Gebiet der Handfeuerwaffen, insbesondere der Jagdbüchsen, ist hier diese Arbeit zum größten Teil schon durchgeführt worden<sup>51)</sup>. Hier liegen für Kaliber von 6,5 bis 9,3 mm Angaben vor, bei denen ein und dasselbe Pulver verwendet wird. Um eine möglichst gute Anpassung auch für kleine Ladungen zu erhalten, wurde hier in der Formel für  $v$  ein von  $\delta$  abhängiger Faktor  $\varepsilon$  eingeführt

$$\varepsilon = \frac{\delta^5}{\delta^5 + \frac{0,2687 \delta^5}{0,6722}}$$

der sich, wie man sieht, für große Werte von  $\delta$  dem Wert 1 nähert. Da bei Gewehren sehr hohe Werte von  $\delta$  auftreten, so wurde zwecks Übereinstimmung für solche Fälle in die Druckformel ein Faktor  $\rho$  eingeführt, der sich aus  $\delta$  nach der Formel  $\rho^2 = \frac{1}{4}(7,155 - \delta)$  berechnet. Unsere Gleichungen lauten dann:

1.  $v = \varphi A \varepsilon l z F(x),$
2.  $P_m = \varphi \rho \delta H \zeta_0^n.$

Es seien aus der angeführten Arbeit einige Ergebnisse der Berechnung für Gewehre hier wiedergegeben.

---

<sup>51)</sup> Bollé, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1932, S. 222—225, 261—264, 296—299, Heft 7, 8 und 9, sowie 1939, Heft 8.

Tabelle 15. Blättchenpulver R 5 der Pulverfabrik Rottweil

$$\varphi = 1 \text{ und } \log 1/\Theta_m = 1,1006$$

Patrone	$c$	$C$	$\tilde{\omega}$	$p$	$v$ ber.	$v$ gem.	$P_m$ ber.	$P_m$ gem.
Kaliber und Hülsen- länge in mm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	p	p	m/sec	m/sec	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>
6,5 × 52 R	2,27	22,91	1,4	7,6	628	610	2150	2150
6,5 × 54	3,2	25,46	2,1	8,2	769	760	2970	2800
8 × 57 JR	3,8	38,01	2,5	14,7	656	660	2860	2900
8 × 57 JR	3,8	38,01	3,0	10,25	845	836	3320	3400
8 × 57 JR	3,8	38,01	3,1	10,0	876	876	3470	3500
8 × 60	4,1	38,35	3,0	12,7	775	779	3350	3400
8 × 60	4,1	38,35	3,35	10,2	902	905	3630	3650
9 × 57	3,8	46,30	3,0	13,5	739	729	3010	3000
9 × 57	3,8	46,30	3,0	16,0	700	700	3275	3400
9,3 × 74 R	4,8	49,63	3,5	18,5	700	709	3250	3330

Die Patronen sind in der handelsüblichen Weise bezeichnet (siehe Einleitung S. 8).

Tabelle 16. Büchse 8 × 57

$$d = 0,079 \text{ dem, } \varphi = 1,2 \text{ und } \log 1/\Theta_m = 0,9791$$

$c$	$C$	$\tilde{\omega}$	$p$	$v$ gemessen	$v$ berechnet	$P$ gemessen	$P$ berechnet
cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	p	p	m/sec	m/sec	kp/cm <sup>2</sup>	kp/cm <sup>2</sup>
3,83	38,01	3,2	10,0	895	896	3300	3360
3,83	38,01	2,7	10,0	785	790	2400	2500
3,83	38,01	2,2	10,0	662	663	1600	1750
3,83	38,01	1,6	10,0	488	488	900	1060
3,51	38,01	2,85	12,8	785	778	3500	3495

Es sei noch darauf hingewiesen, daß das Formelsystem von Gossot und Liouville nicht nur Mündungsgeschwindigkeit und Höchstdruck, sondern auch Geschwindigkeit und Druck an jeder Stelle des Laufes bzw. Rohres rechnermäßig ergibt. Man braucht hierzu für  $C$  nur die Größe des Raumes einzusetzen, der von dem Querschnitt an der angenommenen Stelle und dem Boden der Patronenhülse begrenzt wird.

Das Ergebnis einer solchen Rechnung ist für die Büchse 8 × 57 bei 2,04 p eines scharfen Spezialpulvers und einem 12,8 p-Geschoß nachstehend mitgeteilt und in Vergleich zu dem Ergebnis einer Rücklaufmessung gestellt.

Tabelle 17

Geschoßweg	$C$	$v$	$v$
mm	cm <sup>3</sup>	aus Rücklaufmessung m/sec	berechnet m/sec
5,9	3,815	101	109
45,6	5,886	349	340
81,1	7,738	448	431
171,5	12,257	580	543
278,2	18,017	644	617
393,3	24,022	681	665
511,7	30,197	704	701

Man findet hier durch Rechnung der Größenordnung nach die Geschwindigkeit auch für sehr kleine Geschoßwege ungefähr dem Ergebnis der Rücklaufmessung entsprechend. Es besteht aber eine systematische Abweichung. Die Geschwindigkeitskurven schneiden sich am Anfang und Ende des Geschoßweges und haben etwas verschiedene Krümmung. Ob hier die Formeln oder die Rücklaufmessung das Richtige ergeben, läßt sich zur Zeit nicht entscheiden, weil die Geschoßgeschwindigkeit nach Angabe des Rücklaufmessers aus der Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Pulvergase in jedem Augenblick abgeleitet ist, eine Annahme, die schon nach den Einsichten, die die theoretische Behandlung des „Lagrange-schen Problems“ liefert, sicher nicht genau zutrifft.

Einer systematischen Abweichung in dem Gang der wahren Geschoßgeschwindigkeit mit der Lauflänge zwischen dem Formelsystem und der Beobachtung läßt sich natürlich auch durch einen geeigneten Korrektionsfaktor, der von  $C$  oder  $v$  abhängig zu machen wäre, Rechnung tragen.

Immerhin ist für Büchsen die Leistungsfähigkeit des Systems in einer für viele praktische Bedürfnisse ausreichenden Weise erwiesen.

Ob das System, das im wesentlichen in der Wahl der Variablen  $l$ ,  $z$ ,  $\delta$  besteht, im übrigen aber anpassungsfähig ist, auch imstande sein wird, das große Gebiet der Geschütze aller Art im Einklang mit den Tatsachen richtig darzustellen, bleibt weiterer Rechenarbeit vorbehalten. Ihr Erfolg ist nach den mitgeteilten Beispielen nicht unwahrscheinlich.

### 3. Lösung von Charbonnier

Charbonnier leitet die Grundgleichung I auf folgendem, von Gossot und Liouville mit Recht als nicht einwandfrei bezeichnetem Wege ab.

Er geht zunächst von dem Fall eines so schnell verbrennenden Pulvers aus, daß die Verbrennung schon vor Beginn der Geschößbewegung vollendet ist. Dann ist der Anfangs- und Höchstdruck

$$P_m = \frac{f\tilde{\omega}}{c - \eta\tilde{\omega}};$$

die Gase entspannen sich nunmehr unter Arbeitsleistung adiabatisch nach dem Gesetz

$$P (C - \eta\tilde{\omega})^\gamma = \text{const.}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$P (C - \eta\tilde{\omega})^\gamma = f\tilde{\omega} (c - \eta\tilde{\omega})^{\gamma-1};$$

andererseits ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\pi d^2}{4} P.$$

Nimmt man als Einheiten für  $v$  m/sec, für  $c$  und  $C$  Liter, für  $d = \text{cm}$ ,

so ist  $10(C - c) = \frac{\pi d^2}{4} x$  und  $\frac{\pi d^2}{4} dx = 10 dC$ ;

also

$$m v \frac{dv}{dx} = \frac{\pi d^2}{4} P$$

und

$$m v dv = 10 P dC = 10 f\tilde{\omega} \frac{(c - \eta\tilde{\omega})^{\gamma-1}}{(C - \eta\tilde{\omega})^\gamma} dC,$$

$$m \int_0^v v dv = 10 f\tilde{\omega} \int_c^C \frac{(c - \eta\tilde{\omega})^{\gamma-1}}{(C - \eta\tilde{\omega})^\gamma} dC.$$

Die Integration ergibt, da für  $C = c$ ,  $v = 0$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{10 f\tilde{\omega}}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{c - \eta\tilde{\omega}}{C - \eta\tilde{\omega}} \right)^{\gamma-1} \right]$$

oder mit

$$\Theta = \frac{c - \eta\tilde{\omega}}{C - \eta\tilde{\omega}},$$

$$v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\tilde{\omega}}{m} (1 - \Theta^{\gamma-1}).$$

Für  $C = \infty$  ergibt sich demnach die höchstmögliche Geschwindigkeit  $u$

$$u = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\tilde{\omega}}{m}.$$

Aus

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{10 f\tilde{\omega}}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{c - \eta\tilde{\omega}}{C - \eta\tilde{\omega}} \right)^{\gamma-1} \right]$$



und

$$P(C - \eta \tilde{\omega})^\gamma = f \tilde{\omega} (c - \eta \tilde{\omega})^{\gamma-1} \text{ bzw. } P(C - \eta \tilde{\omega}) = f \tilde{\omega} \left( \frac{c - \eta \tilde{\omega}}{C - \eta \tilde{\omega}} \right)^{\gamma-1}$$

folgt

$$P(C - \eta \tilde{\omega}) + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{m}{10} v^2 = f \tilde{\omega}.$$

Ist zur Zeit  $t$  nicht die ganze Ladung, sondern nur der Bruchteil  $\tilde{\omega} z$  vergast, so folgert Charbonnier

$$\text{I. } P(C - \eta \tilde{\omega}) + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{m}{10} v^2 = f \tilde{\omega} z.$$

Diese Gleichung, obwohl die hier gegebene Ableitung nicht einwandfrei ist, ist dieselbe wie die Gleichung I von Gossot und Liouville, nur daß der veränderten Annahme über die Einheiten der Faktor  $1/10$  im zweiten Gliede der linken Seite entspricht.

Mit der Newtonschen Bewegungsgleichung und dem Charbonnierschen Verbrennungsgesetz haben wir also die drei Grundgleichungen des Problems

$$\text{I. } P(C - \eta \tilde{\omega}) + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{m}{10} v^2 = f \tilde{\omega} z,$$

$$\text{II. } \frac{dz}{dt} = A \varphi(z) P,$$

$$\text{III. } m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\pi d^2}{4} P = \sigma P.$$

Um den Störungen durch sekundäre Phänomene, wie Geschoßreibung und Verteilung der Gase, Rechnung zu tragen, führt Charbonnier für die Geschoßmasse  $m$  hier die „fingierte Masse“

$$m = \frac{p + \vartheta \tilde{\omega}}{g}$$

ein, worin  $\vartheta$  ein geeigneter Bruch ist.

Charbonnier führt ferner den Einpressungsdruck  $P_0$  ein, dem ein bestimmter Bruchteil  $z_0$  der Ladung entspricht, der erst verbrannt sein muß, ehe sich das Geschoß in Bewegung setzt.

$$P_0 = \frac{f \tilde{\omega}}{c - \eta \tilde{\omega}} z_0.$$

Aus Gleichung II und III folgt

$$m dv = \frac{\sigma}{A} \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Die Integration ergibt

$$v = \frac{\sigma}{Am} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Wir setzen

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\varphi(z)} = \mathfrak{B}_{z_0}^z$$

und erhalten

$$v = \frac{\sigma}{Am} \mathfrak{B}_{z_0}^z.$$

Damit geht die Gleichung I über in

$$\frac{\gamma - 1}{2} \ln \frac{C - \eta \tilde{\omega}}{c - \eta \tilde{\omega}} = r \int_{z_0}^z \frac{\mathfrak{B}_{z_0}^z}{z \varphi(z)} \frac{dz}{1 - r \frac{(\mathfrak{B}_{z_0}^z)^2}{z}}$$

mit

$$r = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{m}{10 f \tilde{\omega}} \left( \frac{\sigma}{Am} \right)^2.$$

Hiermit ist  $C$  als Funktion von  $z$  und mit  $v = \frac{\sigma}{Am} \mathfrak{B}_{z_0}^z$  auch  $v$  als Funktion von  $z$ , und somit die Geschwindigkeit  $v$  als Funktion von  $C$  und als Funktion des Geschossweges gegeben. Weiter ist durch I auch  $P$  als Funktion des Geschossweges bekannt, und damit ist das Hauptproblem allgemein gelöst, und zwar durch Quadraturen.

Die Lösung eignet sich aber nicht für allgemeine Erörterungen.

Charbonnier vereinfacht diese Gleichung, indem er den Integranden in eine konvergente Reihe entwickelt und die Entwicklung mit dem ersten Glied abbricht. Er findet als Lösung

$$1 - \frac{\Theta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Theta^2} = r \mathfrak{B}_{z_0}^z \quad \text{mit} \quad \Theta = \frac{c - \eta \tilde{\omega}}{C - \eta \tilde{\omega}}$$

und

$$\mathfrak{B}_{z_0}^z = \int_{z_0}^z \frac{\mathfrak{B}_{z_0}^z}{z \varphi(z)} dz.$$

Diese Beziehung gilt nur bis  $z = 1$ , d. h. bis zur vollständigen Verbrennung des Pulvers.

Für den Gasdruck erhält man

$$P = \frac{f\tilde{\omega}}{c - \eta\tilde{\omega}} z \Theta^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Bezeichnet man mit  $P_1 = \frac{f\tilde{\omega}}{c - \eta\tilde{\omega}}$  den Druck, der entstände, wenn die ganze Ladung in dem Raum verbrennen würde, der den Gasen ursprünglich zur Verfügung steht, nämlich  $c - \eta\tilde{\omega}$ , so wird

$$P = P_1 z \Theta^{\frac{\gamma+1}{2}} = P_1 z (1 - r \mathfrak{B}_{z_0}^z)^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Für vollendete Verbrennung ( $z = 1$ ) ist der Druck

$$P_2 = P_1 S^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \text{wobei } S = 1 - r \mathfrak{B}_{z_0}^1 = \Theta_2^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Nach vollendeter Verbrennung entspannen sich diese Gase adiabatisch, es wird also

$$P = P_1 \frac{\Theta^\gamma}{S}.$$

Für den Höchstdruck erhalten wir

$$P_m = P_1 z_m \Theta_m^{\frac{\gamma+1}{2}}$$

und die Bedingung

$$\Theta_m^{\frac{\gamma+1}{2}} = r \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\mathfrak{B}_{z_0}^{z_m}}{\varphi(z)}.$$

Aus der Gleichung III wird für die Geschwindigkeit nach vollendeter Verbrennung die Beziehung

$$v^2 = v_2^2 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{10f\tilde{\omega}}{m} \left[ S - \frac{\Theta^{\gamma-1}}{S} \right]$$

entwickelt; dabei ist

$$v_2 = \frac{\sigma}{A m} \mathfrak{B}_{z_0}^1.$$

Ganz besonders einfach wird die Lösung für Pulver konstanter Oberfläche ( $\varphi(z) = 1$ ) und bei Vernachlässigung des Einpressungswiderstandes ( $z_0 = 0$ ). Es wird

$$\mathfrak{B}_{z_0}^z = \int_0^z dz = z \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_{z_0}^z = \int_0^z dz = z.$$

Wir haben dann vor vollendeter Verbrennung

$$v = \frac{\sigma}{A m} z, \quad 1 - \Theta^{\frac{\gamma-1}{2}} = r z,$$

$$P = P_1 z \Theta^{\frac{\gamma+1}{2}} = P_1 z (1 - r z)^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Beim Maximaldruck wird

$$1 - r z = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} r z_m$$

oder

$$r z_m = \frac{1}{2\gamma} \quad \text{und} \quad 1 - r z_m = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}, \quad \text{ sowie } \quad 1 - \Theta_m^{\frac{\gamma-1}{2}} = r z_m,$$

$$P_m = P_1 z_m \Theta_m^{\frac{\gamma+1}{2}} = \frac{f\tilde{\omega}}{c - \eta\tilde{\omega}} z_m \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Nach vollendeter Verbrennung ( $z = 1$ ) ist

$$v_2 = \frac{\sigma}{A m}, \quad 1 - r = S \quad \text{und} \quad 1 - \Theta_2^{\frac{\gamma-1}{2}} = r = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{m}{10 f\tilde{\omega}} \left( \frac{\sigma}{A m} \right)^2,$$

also

$$v^2 = \left( \frac{\sigma}{A m} \right)^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\tilde{\omega}}{m} \left( 1 - r - \frac{\Theta^{\gamma-1}}{1 - r} \right) = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{10 f\tilde{\omega}}{m} \left( 1 - \frac{\Theta^{\gamma-1}}{1 - r} \right),$$

$$P = \frac{f\tilde{\omega}}{c - \eta\tilde{\omega}} \frac{\Theta^\gamma}{1 - r}.$$

Die Brauchbarkeit dieses Formelsystems wurde in einer Arbeit<sup>52)</sup> ausführlich gezeigt.

Für den Versuch, diese einfachen Formeln anzuwenden, nehmen wir für  $\gamma$  einen geeigneten Wert  $\gamma = 1,2$  an; und für  $\eta = 0,8$ . In

$$m = \frac{p + \vartheta\tilde{\omega}}{g} \quad \text{setzen wir } \vartheta = 0,3.$$

$f$  und  $A$  sind Konstante für ein und dasselbe Pulver. Wenn wir sie nicht aus Bombenversuchen, sondern empirisch aus dem Verhalten beim Schuß bestimmen, so tragen wir auch hier durch diese Bestimmung der Abweichung der Tatsachen von der starken Idealisierung ( $z_0 = 0$  und  $\varphi(z) = 1$ ) einigermaßen Rechnung.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist nun die Anwendung der Formeln sehr einfach. Haben wir für eine Waffe  $c$ ,  $C_e$ ,  $\sigma$ , sowie die Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  für den Geschößweg  $x_e = \frac{C_e - c}{10\sigma}$  (in m)

<sup>52)</sup> E. Bollé, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 35, 1940.

und den Maximaldruck  $P_m$  gegeben, wobei wir den mit Stauchzylinder gemessenen Druck um 10 % erhöhen, um dem absoluten Druck einigermaßen nahezukommen, so können wir leicht die Werte von  $f$  und  $A$  finden, die für eine gegebene Ladung  $\tilde{\omega}$  des Pulvers und ein gegebenes Geschößgewicht  $p$  zu diesen Werten von  $v_0$  und  $P_m$  führen.

Man kann nun versuchen, mit diesen das Pulver für den einen Fall kennzeichnenden Werten von  $f$  und  $A$  irgendeinen anderen Fall bei Anwendung desselben Pulvers zu berechnen, oder auch viele Fälle heranziehen, um geeignete praktische Mittelwerte von  $f$  und  $A$  zu erhalten.

In den Tabellen 18 bis 21 sind die Ergebnisse solcher Berechnungen angegeben.

Tabelle 18. Pulver R 5  
 $\eta = 0,8$ ,  $\vartheta = 0,3$ ,  $f = 6825$  und  $A = 0,882$

Patronen	Lauf- länge	$c$	$C_e$	$\tilde{\omega}$	$p$	$v_0$	$v_0$	$P_m$	$P_m$
	mm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	p	p	m/sec gem.	m/sec ber.	kp/cm <sup>2</sup> gem.	kp/cm <sup>2</sup> ber.
6,5 × 52 R	655	1,96	22,37	1,4	7,6	610	659	2000	2017
6,5 × 54	720	2,98	25,44	2,1	8,2	760	774	3080	3295
7 × 57	650	3,48	27,99	2,4	11,2	709	703	3147	3212
8 × 57 IR	680	3,83	36,36	3,1	10,0	861	861	3500	3510
8 × 57 IR	680	3,77	36,36	2,5	14,7	650	634	2470	2460
8 × 57 IR	680	3,77	36,36	2,75	12,7	715	721	2805	2936
8 × 57 IR	680	3,77	36,36	2,85	12,7	750	742	2915	3332
8 × 57 IR	680	3,77	36,36	3,0	10,2	856	837	3245	3289
8 × 60	720	4,06	38,50	3,0	12,7	756	758	3300	3190
8 × 60	720	4,06	38,50	3,2	12,7	818	800	3740	4204
8 × 60	720	4,06	38,50	3,35	10,2	905	900	3740	4106
8 × 72 R	660	3,51	34,36	2,65	12,7	694	713	3099	3071
9,3 × 72 R	650	4,09	43,70	2,6	12,5	620	609	1250	1171
9,3 × 72 R	650	4,09	43,70	2,9	13,0	681	680	1980	1727
9,3 × 74 R	600	4,70	41,39	3,5	18,5	675	674	3330	3305
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	3,5	18,5	708	695	3330	3305

Tabelle 19. Pulver T 39  
 $\eta = 0,8$ ,  $\vartheta = 0,3$ ,  $f = 7085$  und  $A = 0,7470$

Patronen	Lauf- länge	$c$	$C_e$	$\tilde{\omega}$	$p$	$v_0$	$v_0$	$P_m$	$P_m$
	mm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	p	p	m/sec gem.	m/sec ber.	kp/cm <sup>2</sup> gem.	kp/cm <sup>2</sup> ber.
6,5 × 52 R	655	1,96	22,37	1,6	7,6	680	706	2546	2515
6,5 × 54	700	2,98	25,44	2,2	6,7	810	827	2300	2414
6,5 × 54	700	2,98	25,44	2,2	8,2	772	786	2750	2906
6,5 × 57 R	660	3,57	23,81	2,8	6,0	1005	972	3330	3340
6,5 × 57 R	600	3,57	21,85	2,3	10,0	684	690	3124	2703
8 × 60	720	4,06	38,50	3,1	14,7	737	724	3190	3230

Tabelle 20. Spezialpulver für  $9,3 \times 74$  R  
 $\eta = 0,8$ ,  $\vartheta = 0,3$ ,  $f = 7400$ ,  $A = 0,6975$

Patronen	Lauf- länge mm	$c$ cm <sup>3</sup>	$C_e$ cm <sup>3</sup>	$\tilde{\omega}$ p	$p$ p	$v_0$ gem. m/sec	$v_0$ ber. m/sec	$P_m$ gem. kp/cm <sup>2</sup>	$P_m$ ber. kp/cm <sup>2</sup>
6,5 × 57 R	700	3,57	23,81	2,3	10,0	693	706	3970	2650
6,5 × 57 R	700	3,57	23,81	2,0	10,0	609	626	3070	1744
6,5 × 57 R	700	3,57	23,81	2,0	8,65	657	649	2900	1522
6,5 × 57 R	700	3,57	23,81	2,8	6,0	976	980	3990	3309
6,5 × 57 R	700	3,57	23,81	2,3	6,0	813	801	2430	1664
6,5 × 57 R	700	3,57	23,81	2,0	6,0	716	675	1850	1249
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	3,85	18,5	741	742	3410	3390
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	3,5	18,5	680	679	2780	2376
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	3,2	18,5	598	636	2030	1924
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	4,0	16,7	779	795	3510	3599
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	3,5	17,7	725	697	2890	2157
9,3 × 74 R	720	4,70	49,53	3,0	16,7	584	591	1990	1298

Tabelle 21. Vergleich zwischen der durch Rücklaufmessung  
erhaltenen Geschwindigkeit mit der berechneten  
(Patrone  $9,3 \times 74$  R, 3,5 p R 5 und 18,5 p Geschoß)

Weg des Geschosses im Lauf mm	$C$ cm <sup>3</sup>	$v$ nach Rücklauf- messung m/sec	$v$ berechnet m/sec	Abweichung
0,5	4,734	8	6	- 2
1,5	4,802	22	17	- 5
4,0	4,972	53	42	- 11
11,0	5,447	106	103	- 3
22,0	6,195	183	172	- 11
42,0	7,553	269	276	+ 7
68,0	9,320	355	366	+ 11
102,4	11,660	418	444	+ 26
141,7	14,330	481	488	+ 7
234,6	20,630	572	575	+ 3
339,8	27,780	628	622	- 6
393,9	31,460	644	639	- 5
507,7	39,190	671	668	- 3
624,0	47,090	687	690	+ 3
684,0	50,250	701	697	- 4

Die Lage des Druckmaximums ergibt sich nach der Rechnung bei einem Geschoßweg von 39 mm und nach der Rücklaufmessung bei 41 mm Geschoßweg.

Die Ergebnisse zeigen, daß teilweise eine überraschend gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen  $v_0$ -

und  $P_m$ -Werten vorhanden ist. Erstaunlich ist, wie gut der Zusammenhang von Geschößweg und -geschwindigkeit durch die Formeln ermittelt werden kann. Wenn bei manchen Patronen größere Abweichungen vorhanden sind, so kann das durch die Waffe bedingt sein, mit der die Daten erschossen wurden. Bei der von uns benutzten Büchse  $6,5 \times 57$  R wurde der Einpreß- und Reibungswiderstand durch statische Durchpreßversuche gemessen, ferner wurden an ihr aus gleichzeitig aufgenommenen Druck- und Rücklaufkurven die Reibung ermittelt, und die Verhältnisse untersucht<sup>53</sup>). Es zeigte sich dabei, daß bei dieser besonderen Waffe eine übermäßig hohe Reibung vorliegt. Diesem Umstand ist es auch zuzuschreiben, daß die gemessenen Maximaldrucke (Tabelle 20) viel höher als die berechneten liegen. Es ist klar, daß die Formeln nur für Waffen mit normalen Reibungsverhältnissen und für Geschosse mit nicht zu großen oder kleinen Führungslängen gelten. Um die Leistungsfähigkeit des Charbonnierschen Formelsystems noch zu steigern, müßte die Reibung besonders berücksichtigt werden.

#### 4. Lösung von Schmitz-Cranz

In Deutschland hat die Gedankengänge von Charbonnier vor allem Schmitz in seiner schon genannten Arbeit<sup>54</sup>) aufgenommen. Cranz hat diese Arbeit mit einem wichtigen Zusatz versehen, auf den wir sogleich noch näher eingehen werden<sup>55</sup>).

Schmitz schließt sich der Verbrennungsgleichung

$$\frac{dz}{dt} = A \varphi(z) P$$

von Charbonnier an, und entwickelt die Übertragung der Druckkurve aus einer Bombe, die er besonders für Feder-Druckregistrierung ausgearbeitet hat (siehe S. 21), auf die Berechnung des Druckverlaufs im Geschütz. Er berücksichtigt den durch Verschwinden des festen Pulvers beim Abbrand frei werdenden Raum nicht, wie es Charbonnier, Gossot und Liouville und die meisten Ballistiker tun, durch einen geeigneten Wert des „Kovolumens“  $\eta$ , sondern sucht ihn streng durch ein eigentümliches Verfahren sukzessiver Näherungen in Rechnung zu ziehen.

<sup>53</sup>) K. H. Bodlien, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. **34**, 33–38, 65–69 u. 97–103, 1939, Nr. 2–4.

<sup>54</sup>) Neuere Versuche der Friedr. Krupp A.-G. über innere Ballistik. Art. Monatsheft 1913, Nr. 84, Dez.-Heft, S. 482–498 und 1914, Nr. 86, Febr.-Heft, S. 85–110.

<sup>55</sup>) Cranz, Ballistik **2**, 1928.

Es ist von Bedeutung, daß Cranz gezeigt hat, daß auch bei strenger Berücksichtigung des Umstandes, daß der Raum hinter dem Geschosßboden nicht nur durch die Geschosßbewegung, sondern auch durch das Schwinden des festen Pulvers wächst, die Gleichungen eine strenge Lösung zulassen.

Der den Gasen zur Verfügung stehende Raum ist

$$J = J_0 + qx - \eta \tilde{\omega} z - \frac{\tilde{\omega}}{\delta} (1 - z),$$

wobei  $J_0$  der ursprüngliche Verbrennungsraum,  $q$  der Geschosßquerschnitt und  $x$  der Geschosßweg ist; die Hauptgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & PJ + \frac{\gamma - 1}{10} \frac{mv^2}{2} = f\tilde{\omega}z, \\ \text{II.} \quad & \frac{dz}{dt} = A\varphi(z)P, \\ \text{III.} \quad & m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = Pq. \end{aligned}$$

Nennt man  $P_0$  wieder den Einpressungsdruck, dem ein verbrannter Bruchteil  $z_0$  entspricht, so ist

$$P_0 = \frac{f\tilde{\omega}z_0}{J_0 - \eta\tilde{\omega}z_0 - \frac{\tilde{\omega}}{\delta}(1 - z_0)}.$$

Wie bei Charbonnier gewinnt man aus II und III

$$v = \frac{q}{m} \xi(z, z_0), \quad \text{wobei} \quad \xi(z, z_0) = \frac{1}{A} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Nun ist  $\varepsilon = \frac{1}{\delta}$ , also  $10 dJ = qdx - \tilde{\omega}(\eta - \varepsilon) 10 dz$ , wenn wir  $J$  in Liter und  $x$  in m rechnen, somit folgt aus III:

$$P = \frac{1}{10} \frac{mv dv}{dJ + \tilde{\omega}(\eta - \varepsilon) dz}.$$

Setzt man diesen Ausdruck für  $P$  in I ein, so wird mit  $mv = q\xi(z)$  und  $dv = \frac{q}{m} \xi'(z) dz$

$$\frac{1}{10} \frac{q^2 \xi(z) \xi^1(z)}{m} dz \cdot \mathcal{J} + \frac{\gamma - 1}{10} \frac{mq^2 \xi^2(z)}{2m^2} = f\tilde{\omega}z,$$



d. h. eine Differentialgleichung zwischen  $J$  und  $z$ , die man auch folgendermaßen schreiben kann

$$\frac{dJ}{dz} - \frac{q^2}{10m} \frac{\xi(z) \xi^1(z)}{f\tilde{\omega}z - \frac{\gamma-1}{10} \frac{q^2}{2m} \xi^2(z)} J = -\tilde{\omega}(\eta - \varepsilon).$$

Das ist aber eine Differentialgleichung vom Typus

$$\frac{dy}{dx} + My = Q,$$

in der  $M$  und  $Q$  Funktionen von  $x$  sind,  $Q$  ist hier sogar eine Konstante  $Q = -\tilde{\omega}(\eta - \varepsilon)$ .

Die Anwendung der Theorie der typischen Differentialgleichung ergibt dann, wenn  $J_0$  der Wert von  $J$  für  $x = 0$ , d. h. für  $z = z_0$  ist:

$$J = J_0 e^{\int_{z_0}^z X(z) dz} - Q e^{\int_{z_0}^z X(z) dz} \int_{z_0}^z e^{-\int_{z_0}^z X(z) dz} dz.$$

Dabei ist

$$X(z) = \frac{1}{\gamma-1} \frac{f\tilde{\omega} - \psi'(z)}{\psi(z)} \quad \text{und} \quad \psi(z) = f\tilde{\omega}z - \frac{\gamma-1}{2} \frac{q^2}{10m} \xi^2(z).$$

Dazu tritt

$$v = \frac{q}{m} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\varphi(z)} = \frac{q}{m} \xi(z)$$

und

$$P = \frac{f\tilde{\omega}z - \frac{\gamma-1}{10} \frac{mv^2}{2}}{J},$$

wodurch das Problem völlig gelöst ist bis  $z = 1$ . Ist für  $z = 1$   $J = J_1$ ,  $x = x_1$ ,  $v = v_1$  und  $P = P_1$ , so erhält man aus der Expansionsgleichung  $P = P_1 \left(\frac{J_1}{J}\right)^\gamma$  in Verbindung mit III und  $qdx = 10PdJ$  leicht die Gleichung für die Geschwindigkeit  $v$  nach vollendeter Verbrennung aus

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{10P_1dJ_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{J_1}{J}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Aus

$$\frac{1}{A} \int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)} = \int_0^t P dt$$

in Verbindung mit  $P = \frac{f\tilde{\omega}z}{J_0 - \tilde{\omega}(1-z)\varepsilon - \eta\tilde{\omega}z}$  folgt, da man bei Bombenregistrierversuchen aus der Druckzeitkurve das Integral  $\int_0^t P dt$  für jeden Wert von  $P$  ermitteln kann, daß man damit  $\int_0^z \frac{dz}{\varphi(z)} = \xi(z)$

für jeden Wert von  $z$  kennt und somit die Funktionen  $\xi(z)$ ,  $\xi'(z)$  und  $\psi(z)$  sowie  $X(z)$  als Funktionen von  $z$  für das untersuchte Pulver berechnen kann. Diesen Weg wird man beschreiten müssen, wenn man die Wirkung des Pulvers aus Bombenversuchen voraus berechnen will. Daß dieser Weg gangbar ist, hat Schmitz in seiner Arbeit bewiesen, wenn er sich auch nicht der obigen geschlossenen Lösung von Cranz bedient hat.

### 5. Lösung von Langweiler

Langweiler macht einen ähnlichen Ansatz wie Charbonnier und Schmitz-Cranz, um ein geschlossenes Formelsystem zu entwickeln<sup>56)</sup>. Zur Vereinfachung der Gleichungen führt er für die Räume, Gewichte und Kräfte reduzierte Werte ein, indem er die Größen durch den Seelenquerschnitt dividiert, so wird z. B. der Verbrennungsraum  $W_a$  durch  $w_a = W_a/q$  und die Pulverladung  $Lg$  durch  $lg = Lg/q$  ersetzt.

Die Energie einer Gasmenge vom Druck  $P_1$  und dem Volumen  $W_1$  beträgt nach dem Poissonschen Gesetz

$$E = \frac{P_1 W_1}{K - 1},$$

wobei  $K$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $K = c_p/c_v$  ist. Nach der Abelschen Gleichung ist  $P_1 = fl/W_1$  mit dem spezifischen Druck  $f$  und der vergasteten Ladung  $l$ .

Die Energie des verbrannten Pulvers ist demnach

$$E = \frac{P_1 W_1}{K - 1} = \frac{fl}{K - 1}.$$

Diese Energie muß der kinetischen Energie der bewegten Massen ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) und der noch in der Gasmenge steckenden potentiellen Energie gleich sein.

Das den Gasen zur Verfügung stehende Volumen setzt sich aus dem ursprünglichen Verbrennungsraum und dem durch die Geschoßbewegung frei gewordenen Raume zusammen; vermindert wird der

<sup>56)</sup> Langweiler, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. **33**, 273–276, 305–309 u. 338–342, 1938.

Raum durch das Volumen des noch nicht vergasten Teiles der Ladung und durch das Eigenvolumen der Gase. In guter Annäherung können wir annehmen, daß das spezifische Volumen des Pulvers und das Kovolumen der Gase gleich ist. Führen wir den freien reduzierten Verbrennungsraum

$$s_a = w_a - a l g$$

ein, so erhalten wir als den den Gasen zur Verfügung stehenden Raum

$$W = s_a + s.$$

Die Energiegleichung lautet dann

$$\frac{fl}{K-1} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{P(s_a + s)}{K-1},$$

$$\text{I. } fl = P(s_a + s) + \frac{K-1}{2} m v^2.$$

In der Charbonnierschen Verbrennungsgleichung wird ganz allgemein  $\varphi(z) = 1$  gesetzt und die Formel in der einfachen Form benutzt

$$\text{II. } \frac{dl}{dt} = A l g P.$$

Bei der Aufstellung der dynamischen Grundgleichung wird auch auf die Reibung Rücksicht genommen. Langweiler nimmt an, daß die Reibung ( $b$ ) dem Druck direkt proportional ist

$$b = cP.$$

Als Kraftgleichung erhalten wir dann

$$\text{III. } P = \frac{m}{1-c} \frac{dv}{dt}.$$

In Abweichung von der üblichen Behandlung des Problems stellt Langweiler die Beziehung

$$t = t(l),$$

d. h. die Abhängigkeit der Zeit von der verbrannten Ladung, als Hauptgleichung auf.

Aus den Gleichungen II und III erhält man

$$dl = A l g \frac{m}{1-c} dv.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt, wenn man die Integration rechts von 0 bis  $v$  und links von  $l_a$  bis  $l$  durchführt, wobei  $l_a$  die Pulvermenge darstellt, die zur Zeit des Beginns der Geschößbewegung (also  $t = 0$  und  $v = 0$ ) verbrannt ist,

$$l = A l g \frac{m}{(1-c)} v + l_a.$$

Die Pulvermenge  $l_a$  kann mit Hilfe der Abelschen Gleichung aus dem Anfangsdruck  $P_a$  berechnet werden:

$$P_a = \frac{f l_a}{s_a},$$

$$l_a = \frac{P_a s_a}{f}.$$

Im allgemeinen wird  $P_a$  gleich dem Einpreßwiderstand sein.

Aus obiger Gleichung erhalten wir

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{l - l_a}{A l g m} (1 - c),$$

$$ds = \frac{1 - c}{A l g m} (l - l_a) dt$$

und durch Integration den Geschößweg

$$s = \frac{1 - c}{A l g m} \int_0^t (l - l_a) dt.$$

Wenn wir in der Gleichung (I)  $P$ ,  $v$  und  $s$  durch die soeben entwickelten Ausdrücke ersetzen, erhalten wir nach einigen Zwischenrechnungen die gesuchte Hauptgleichung

$$t = \frac{1}{A l g P_a} \int_{l_a}^l e^{-\int_{l_a}^l F(l) dl} dl$$

mit

$$F(l) = \frac{f - \frac{1 - c}{A^2 l g^2 m} (l - l_a) [1 + (K - 1)(1 - c)]}{fl - \frac{1 - c}{A^2 l g^2 m} \frac{K - 1}{2} (1 - c) (l - l_a)^2}.$$

Hieraus kann  $t$  ohne weiteres auf graphischem oder numerischem Wege ermittelt werden. Zur praktischen Anwendung ist das Gleichungssystem aber in dieser Form noch nicht geeignet. Es wird deshalb in der Gleichung für  $F(l)$  der 2. Summand im Nenner vernachlässigt, da er ja gegen  $fl$  klein ist. Diese Vernachlässigung bedeutet, daß die kinetische Energie der Masse  $m$  klein ist gegenüber der potentiellen Energie der entwickelten Pulvergase. Die Annahme ist berechtigt, da bis zum Verbrennungsende die kinetische Energie nur einige Prozente der potentiellen Energie beträgt. Wenn wir außerdem noch  $c$  vernachlässigen, erhalten wir

$$F(l) = \frac{1}{l} \left( 1 + \frac{K G l_a}{f} \right) - \frac{K G}{f} \quad \text{mit} \quad G = \frac{1 - c}{A^2 l g^2 m}.$$

Mit dieser Beziehung kann die Integration exakt durchgeführt und können alle Größen berechnet werden.

Solange das Pulver noch nicht vollständig verbrannt ist, gilt für den Gasdruck die Beziehung

$$P = \frac{fl}{s_a} e^{-\frac{KG}{f}(a-l)} \left( 1 + \frac{KG l_a}{f} \ln \frac{l}{l_a} \right).$$

Für die Ladungsmenge, die zur Zeit des Höchstdruckes verbrannt ist, erhalten wir

$$l_m = \frac{D}{1-c} lg + l_a \quad \text{mit} \quad D = \frac{fA^2 l g m}{K}.$$

Da  $l_m$  nicht größer werden kann als  $lg$ , soll obige Beziehung nur für  $D < 1$  gelten. Für  $D > 1$  setzen wir  $l_m = lg$ .

Um den Höchstdruck zu erhalten, setzen wir in die Druckformel den Wert von  $l_m$  ein. Berücksichtigen wir noch, daß  $P_E = flg/s_a$  der höchstmögliche Druck (Explosionsdruck) ist, so erhalten wir schließlich

$$P_m = P_E \frac{D}{e} + b_m + \frac{P_a}{e} \left( 2 + \ln \frac{P_m}{P_a} \right).$$

Setzen wir

$$K_1 = b_m + \frac{P_a}{e} \left( 2 + \ln \frac{P_m}{P_a} \right)$$

als die Korrektur des Höchstdruckes durch die Reibung und den Anfangsdruck, so wird

$$P_m = P_E \frac{D}{e} + K_1, \quad D < 1.$$

Für den Fall  $D > 1$  muß für  $l = l_m = lg$  in die Druckgleichung gesetzt werden. Die Durchführung der Rechnung ergibt

$$P_m = P_E e^{-\frac{1}{D}} + \frac{b_m}{D} + \frac{e^{-\frac{1}{D}}}{D} P_a \left( 1 + \frac{1}{D} + \ln \frac{P_m}{P_a} \right).$$

Das Korrektionsglied lautet dann

$$K_2 = \frac{b_m}{D} + \frac{e^{-\frac{1}{D}}}{D} P_a \left( 1 + \frac{1}{D} + \ln \frac{P_m}{P_a} \right),$$

$$P_m = P_E e^{-\frac{1}{D}} + K_2, \quad D > 1.$$

Für  $D = 1$  gelten dieselben Gleichungen wie für  $D < 1$ .

Wir sehen aus den Formeln für  $P_m$ , daß der Höchstdruck mit dem Vergrößern der Reibung, des Anfangsdruckes und von  $D$  erhöht wird. Die Reibung ( $b$ ) spielt allerdings nur bei kleinkalibrigen Waffen eine große Rolle. Der Anfangsdruck  $P_a$  kann besonders bei Waffen

mit kleinem Einpreßwiderstand durch den Druck der Initialzündung beeinflußt werden.  $D$  ist der Masse direkt proportional und es ist klar, daß eine Vergrößerung der Masse den Maximaldruck erhöht, der Explosionsdruck ist aber der höchste Druck, der auch durch noch so große Masse nicht überschritten wird.

Den Geschossweg können wir mit Hilfe der Abelschen Gleichung bestimmen

$$P_m = \frac{fl_m}{s_a + s_m}.$$

Für  $D < 1$  wird bei Vernachlässigung von  $c$  und des Korrektionsgliedes  $K_1$

$$fDl_g = P_E \frac{D}{e} (s_a + s_m),$$

$$s_m = (e - 1) s_a, \quad D < 1.$$

(Diese Beziehung hat Lorenz auf anderem Wege als allgemein gültig befunden.)

Für  $D > 1$  wird

$$fl_g = P_E e^{-\frac{1}{D}} (s_a + s_m),$$

$$s_m = \left( e^{-\frac{1}{D}} - 1 \right) s_a, \quad D > 1.$$

Mit der Vergrößerung von  $D$  geht demnach  $s_m$  gegen Null. Für das Ende der Pulververbrennung gelten dieselben Gleichungen wie beim Höchstdruck für  $D > 1$ .

$$s_e = \left( e^{-\frac{1}{D}} - 1 \right) s_a,$$

außerdem wird

$$v_e = \frac{1}{A_i m}$$

$$P_e = P_E e^{-\frac{1}{D}}.$$

Nach vollendeter Verbrennung des Pulvers entspannen sich die Gase adiabatisch

$$P(s + s_a)^K = P_e(s_e + s_a)^K.$$

Setzen wir für das Verhältnis des freien reduzierten Gasraumes  $(s + s_a)$  zum ursprünglichen Verbrennungsraum  $(s_a)$  die Zahl  $n$ ,

$$n = \frac{s + s_a}{s_a},$$

so erhalten wir für den Druck nach vollständiger Pulververbrennung

$$P = P_e \left[ \frac{(e^{\frac{1}{D}} - 1) s_a + s_a}{n s_a} \right]^K = P_e \left( \frac{e^{\frac{1}{D}}}{n} \right)^K,$$

$$P = P_E e^{\frac{K-1}{n^K}}.$$

Nennen wir  $n_0$  das Verhältnis der Gasräume beim Austritt des Geschosses aus dem Rohr, so wird der Mündungsdruck

$$P_0 = P_E \frac{e^{\frac{K-1}{n_0^K}}}{n_0^K}.$$

Die Gleichungen für die Geschößgeschwindigkeit entwickeln wir aus einer Energiebetrachtung.

Die bei der Entspannung der Gase für mechanische Arbeit freierwerdende Energie muß dem Zuwachs der kinetischen Energie der bewegten Massen gleich sein.

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_e^2 + E_{adiab},$$

$$E_{adiab} = \frac{P_e e^{\frac{1}{D}} s_a}{K-1} - \frac{P n s_a}{K-1} = \frac{P_E s_a}{K-1} - \frac{P_E s_a e^{\frac{K-1}{D}} n^{-(K-1)}}{K-1},$$

$$E_{adiab} = \frac{f l g}{K-1} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{K-1}{D}}}{n^{K-1}} \right],$$

$$v^2 = v_e^2 + \frac{2 f l g}{m (K-1)} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{K-1}{D}}}{n^{K-1}} \right].$$

Für die Mündungsgeschwindigkeit wird dann entsprechend

$$v_0^2 = \frac{1}{A^2 m^2} + \frac{2 f l g}{m (K-1)} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{K-1}{D}}}{n_0^{K-1}} \right].$$

Den Einfluß des Anfangsdruckes und der Reibung auf die Geschößgeschwindigkeit wollen wir aus der Druckgleichung berechnen.

Aus  $P_e = P_E e^{-\frac{1}{D}}$  folgt

$$\frac{\Delta P_e}{\Delta D} = P_E e^{-\frac{1}{D}} \frac{1}{D^2}.$$

Setzen wir  $\Delta P_e$  dem Korrektionsglied  $K_2$  gleich, also

$$\Delta P_e = K_2,$$

so wird

$$\Delta D = \frac{K_2}{P_E} D^2 e^{\frac{1}{D}}.$$

Durch Einführung von  $\Delta D$  in die Geschößgeschwindigkeitsgleichung kann die Korrektur der Geschwindigkeit berechnet werden. (Der Einfluß von  $K_2$  auf  $v_e$  ist vernachlässigt.) Wir sehen, daß mit dem Größerwerden des Anfangsdruckes die Mündungsgeschwindigkeit zunimmt. Im günstigsten Falle wird  $e^{\frac{K-1}{D+AD}} = 1$  und damit

$$v_0^2 = \frac{1}{A^2 m^2} + \frac{2 flg}{(K-1)m} \left[ 1 - \frac{1}{n_0^{K-1}} \right].$$

Es muß noch besonders erwähnt werden, daß mit dieser Steigerung der Geschwindigkeit und damit der Leistung aber auch der Höchstdruck zunimmt.

Eine zweite Möglichkeit,  $v_0$  zu erhöhen, liegt in der Vergrößerung von  $s_0$  und damit von  $n_0$ . Für  $n_0 = \infty$  wird

$$v_0^2 = \frac{1}{A^2 m^2} + \frac{2 flg}{(K-1)m}.$$

Der Wirkungsgrad ( $y$ ) einer Waffe ist das Verhältnis der kinetischen Energie des Geschosses  $\left( \frac{1}{2} \frac{p}{g} \cdot v_0^2 \right)$  zur potentiellen Energie der Pulvergase  $\left( \frac{flg}{K-1} \right)$ .

$$y = \frac{p}{mg} \left[ \frac{K-1}{2KD} + 1 - \frac{e^{\frac{K-1}{D}}}{n_0^{K-1}} \right]$$

( $g$  bedeutet die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ ).

Der Wirkungsgrad wird mit der Vergrößerung von  $D$  günstiger, z. B. durch Erhöhung der Brisanzkonstante  $A$  (schneller verbrennendes Pulver). Für  $D = \infty$  wird

$$y = \frac{p}{mg} \left( 1 - \frac{1}{n_0^{K-1}} \right).$$

Verlängert man außerdem noch das Rohr ( $n_0 = \infty$ ), so wird

$$y_{max} = \frac{p}{mg}.$$

In unseren Gleichungen hat  $m$  die Bedeutung einer „fingierten“ Masse

$$m = \frac{p + ilg}{g}.$$



Der Zusatz  $i lg$  zur Geschößmasse trägt der Tatsache Rechnung, daß ein Teil der kinetischen Energie in der Bewegung der Gase steckt. Über die Bewegung der Gase im Raum zwischen Rohr- und Geschößboden haben wir uns schon bei der Besprechung des Rücklaufmessers befaßt. Allgemein wird angenommen, daß der Schwerpunkt der Gase bis zum Austritt des Geschößes aus dem Lauf zu jedem Zeitpunkt in der Mitte zwischen Geschöß- und Rohrboden liegt. Diese Annahme wurde auch von Langweiler durch Impulsmessungen<sup>57)</sup> bestätigt. Demnach können wir annehmen, daß sich die gesamte Gasmenge  $lg$  mit der halben Geschößgeschwindigkeit bewegt. Der Anteil der kinetischen Energie, der in der Bewegung der Gase steckt, ist dann  $\frac{1}{2} \frac{lg}{g} \left(\frac{v}{2}\right)^2$ , also

$$\frac{1}{2} \frac{lg}{g} \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} i lg v^2,$$

$$i = \frac{1}{4}.$$

Bei allen Energiegleichungen ist demnach  $i = \frac{1}{4}$  zu setzen. Auf diese Tatsache muß besonders hingewiesen werden, da viele Ballistiker den Sébertschen Faktor 0,5 auch in die Energiegleichungen eingesetzt haben.

Mit diesem Wert von  $i$  wird unser Ausdruck für den maximalen Wirkungsgrad

$$y_{max} = \frac{p}{p + \frac{1}{4} lg}.$$

Zur Berechnung der Zeiten macht Langweiler die vereinfachende Annahme, daß der Gasdruck linear mit der Zeit ansteigt und abfällt:

$$P = m \frac{d^2 s}{dt^2} = c_1 t \quad \text{für den Druckanstieg,}$$

$$P = m \frac{d^2 s}{dt^2} = c_2 (t_2 - t) \quad \text{für den Druckabfall.}$$

Mit diesen Annahmen ergeben die Integrationen:

$$t_m = \frac{3 s_m}{v_m},$$

$$t_0 = \frac{3 s_m}{v_m} + \frac{3 (s_0 - s_m)}{2 v_0 + v_m}.$$

<sup>57)</sup> Langweiler, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. **32**, 1937, Nr. 3.

Wir wollen die Formeln zur Berechnung der ballistischen Größen noch einmal zusammenstellen:

$$P_E = \frac{f l g}{s_a},$$

$$P_0 = P_E \frac{e^{\frac{K-1}{D}}}{n_0^{K-1}},$$

$$v_0^2 = \frac{1}{A^2 m^2} + \frac{2 f l g}{(K-1) m} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{K-1}{D}}}{n_0^{K-1}} \right].$$

Für die Berechnung der Maximalwerte haben wir  $D = \frac{f l g A^2 m}{K}$  als Kriterium.

Ist  $D \leq 1$ , so gilt

$$l_m = \frac{D}{1-c} l g + \frac{P_a s_a}{f},$$

$$P_m = P_E \frac{D}{e} + K_1,$$

$$K_1 = b_m + \frac{P_a}{e} \left( 2 + \ln \frac{P_m}{P_a} \right).$$

Wenn  $D > 1$  ist, haben wir

$$l_m = l g,$$

$$P_m = P_E e^{-\frac{1}{D}} + K_2,$$

$$K_2 = \frac{b_m}{D} + \frac{e^{-\frac{1}{D}}}{D} P_a \left( 1 + \frac{1}{D} + \ln \frac{P_m}{P_a} \right).$$

Aus den Daten der Waffe und der Ladung sind bekannt  $l g$ ,  $w_a$  und  $s_0$ , außerdem werden für  $P_a$  und  $c$  Näherungswerte angenommen. Unbekannt sind die Pulverkonstanten  $A$ ,  $f$ ,  $a$  und  $K$ . Diese Werte können aber durch Vergleichsschüsse oder durch Versuche in der Verbrennungsbombe bestimmt werden.

Die Vergleichsschüsse können beispielsweise so ausgeführt werden, daß man in der gleichen Waffe dasselbe Pulver mit verschiedener Ladung (Pulvermenge) und verschieden schweren Geschossen verschießt. Mißt man bei jedem Schuß den Höchstdruck und die Mündungsgeschwindigkeit, so kann man mit Hilfe der Formeln die Konstanten errechnen.

Durch Bombenversuche sind die Konstanten auf folgende Weise zu bestimmen.

Nach dem Verbrennungsgesetz ist  $\frac{dLg}{dt} = A Lg P$ , also

$$\int_0^t P dt = \frac{1}{A Lg} \int_0^{Lg} dL = \frac{1}{A}.$$

Man muß also bei der Druck-Zeitkurve, die man beim Abbrennen des Pulvers in der Bombe erhält, die Fläche ausmessen, die die Druckkurve vom Beginn bis zum Ende des Druckanstiegs umschließt, und erhält dadurch den reziproken Wert von  $A$ .

$f$  und  $a$  kann aus dem Höchstdruck bei Bombenversuchen mit Hilfe der Abelschen Gleichung bestimmt werden.

$$f = \frac{P(W - a Lg)}{Lg}.$$

$W$  ist hier das Volumen der Bombe. Das Kovolumen  $a$  der Gase ist annähernd gleich dem reziproken Wert des spezifischen Gewichtes des festen Pulvers (spezifisches Volumen).

Wie wir oben schon gezeigt haben, ist die potentielle Energie der Pulvermenge  $E = f Lg / (K - 1)$ . Diese Energie muß aber auch dem auf kalorimetrischem Wege zu messenden Energieinhalt ( $u Lg$ ) des festen Pulvers gleich sein, also

$$E = \frac{f Lg}{K - 1} = u Lg$$

und daraus folgt

$$K = 1 + \frac{f}{u}.$$

Auf diese Weise fand Langweiler für die gebräuchlichsten Pulversorten folgende  $K$ -Werte:

Nitrozellulose . . . . .	$K = 1,21,$
Nitroglycerin . . . . .	$K = 1,18.$

Da es in der Praxis von großer Wichtigkeit ist, den Einfluß der Änderung der Ausgangsgrößen der Waffe, des Pulvers und des Geschößgewichtes auf die Mündungsgeschwindigkeit und den Höchstdruck zu kennen, hat Langweiler die Differenzenformeln für die Änderung von  $v_0$  und  $P_m$  angegeben. Da  $D$  in den meisten Fällen kleiner als 1 ist, werden wir die Differenzenformeln auch nur für  $D < 1$  aufstellen. Die Ausgangsgleichungen sind dann

$$v_0^2 = \frac{1}{A^2 m^2} + \frac{2 f l g}{(K - 1) m} \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{K-1}{D}}}{n_0^{K-1}} \right]$$

und

$$P_m = P_E \frac{D}{e}.$$

$$d v_0 = \frac{f l g}{m v_0} \left( \frac{1}{n_0} \right)^{K-1} e^{\frac{K-1}{D}} \frac{1}{D^2} d D \quad \left( D = \frac{f A^2 l g m}{K} \right),$$

und da

$$\Delta D = \frac{K_2}{P_E} D^2 e^{\frac{1}{D}},$$

wird

$$d v_0 = \frac{s_a}{m v_0} \left( \frac{1}{n_0} \right)^{K-1} e^{\frac{K}{D}} K_2, \quad K_2 \text{ ist eine Funktion vom Anfangsdruck } P_a \text{ (Einpreßwiderstand) und der Reibung } b,$$

$$d v_0 = \frac{P_E}{m v_0} e^{\frac{K-1}{D}} \frac{1}{n_0^K} d s_0, \quad \text{Rohrlänge } s_0 = n_0 s_a + s_a,$$

$$d v_0 = - \frac{P_E}{m v_0} e^{\frac{K-1}{D}} \frac{n-1}{n_0^K} d w_a, \quad \text{anfänglicher reduzierter Verbrennungsraum.}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt das interessante Resultat, daß die Vergrößerung des anfänglichen Verbrennungsraumes (in  $W_a/q$  gemessen) dieselbe Geschwindigkeitsverminderung hervorruft wie eine Verkürzung der Rohrlänge um das  $(n-1)$ -fache dieser Volumenvergrößerung. Die Änderung des Verbrennungsraumes spielt überhaupt eine große Rolle, denn mit jedem Schuß wird das Volumen größer und damit die Mündungsgeschwindigkeit kleiner. Da die Messung der Änderung des Verbrennungsraumes an jeder Waffe leicht durchzuführen ist, kann mit Hilfe der obigen Differenzenformel gemessen und berechnet werden, wann ein Rohr als ausgeschossen zu bezeichnen ist.

Für den Höchstdruck erhalten wir folgende Differenzenformel:

$$d P_m = P_m \frac{2}{f} d f, \quad \text{spezifischer Druck,}$$

$$d P_m = P_m \left( \frac{2}{l g} + \frac{i}{m} + \frac{a}{s_a} \right) d l g, \quad \text{Ladungsmenge,}$$

$$d P_m = P_m \frac{2}{A} d A, \quad \text{Brisanzkonstante,}$$

$$d P_m = P_m \frac{1}{m} d p, \quad \text{Geschoßgewicht,}$$

$$d P_m = - P_m \frac{1}{s_a} d W_a, \quad \text{anfänglicher reduzierter Verbrennungsraum.}$$

Die Anwendung der Formeln wird an einigen Beispielen erläutert.

Bei der Büchse  $8 \times 57$  JR erhielten wir bei einem Schuß mit 2,5 p Blättchenpulver R 5 und dem 14,7 p schweren Geschöß einen Höchstdruck von  $2470 \text{ kp/cm}^2$ . Der ursprüngliche Verbrennungsraum ist  $W = 3,77 \text{ cm}^3$ , der Geschößweg im Lauf  $s_0 = 68 \text{ cm}$  und der Querschnitt  $q = 0,52 \text{ cm}^2$ . Wir erhalten daraus folgende reduzierte Größen:

$$\begin{aligned}lg &= 4,81 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right], \\w_a &= 7,24 \cdot 10^{-2} [\text{m}], \\m &= 3,04 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} / \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right].\end{aligned}$$

Da es sich bei dem Pulver R 5 um ein Nitrozellulosepulver handelt, können wir für  $K = 1,21$  setzen und nach Cranz<sup>58)</sup> für den spezifischen Druck  $f = 8,2 \cdot 10^4 [\text{m}]$  und für  $a = 9,8 \left[ \text{m} / \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right]$  annehmen. Mit diesen Konstanten berechnen wir die weiteren reduzierten Größen:

$$\begin{aligned}s_a &= w_a - a lg = 2,52 \cdot 10^{-3} [\text{m}], \\n_0 &= \frac{s_0 - s_a}{s_a} = 28, \\P_E &= \frac{f lg}{s_a} = 15,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}.\end{aligned}$$

Es fehlt uns nur noch die Brisanzkonstante  $A$ , dann können alle anderen Werte berechnet werden. Wir rechnen deshalb mit Hilfe des gemessenen Höchstdruckes die Hilfsgröße  $n K_1$  und  $D$  aus. Für den Anfangsdruck  $P_a$  setzen wir den Einpreßwiderstand, der, wie wir später (S. 102) noch sehen werden, beim 8 mm-Gewehr etwa  $300 \text{ kp/cm}^2$  beträgt. Wenn wir den Reibungswiderstand vernachlässigen, erhalten wir

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{P_a}{e} \left( 2 + \ln \frac{P_m}{P_a} \right) = 458 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}, \\D &= \frac{P_m K_1}{P_E} e = 0,350, \\A &= \sqrt{\frac{DK}{f l g m}} = 0,594.\end{aligned}$$

<sup>58)</sup> Cranz, Lehrb. d. Ballistik 2, 26, 1926.

In der nachstehenden Tabelle 22 sind die berechneten und gemessenen Werte für einige Patronen mit dem Pulver R 5 unter Zugrundelegung dieses Wertes für die Brisanzkonstante  $A$  angegeben.

Tabelle 22. Gemessene und berechnete Schußergebnisse mit dem Pulver R 5

$$f = 8,2 \cdot 10^4 [m], \quad a = 9,8 \left[ m / \frac{kp}{cm^2} \right], \quad K = 1,21 \quad \text{und} \quad A = 0,594$$

Patrone	Ladung $Lg$ in p	Geschoßgewicht $p$ in p	Geschoßweg $s_0$ in m	Anfänglicher Verbrennungsraum $w_a$ in $cm^3$	Mündungsgeschwindigkeit $v_0$ in m/sec		Höchstdruck $P_m$ in $kp/cm^2$	
					gem.	ber.	gem.	ber.
6,5 × 52 R	1,4	7,6	0,61	1,96	610	670	2000	2100
7 × 57	2,4	11,2	0,60	3,48	709	655	3147	3280
8 × 57 JR	2,5	14,7	0,68	3,77	650	650	2470	2470
8 × 57 JR	3,1	10,0	0,68	3,77	860	—*)	3500	3800
9,3 × 74 R	3,5	18,5	0,66	4,70	701	735	3495	3525
11,2 × 72	5,25	26,0	0,61	7,30	736	810	3500	3350

\*) Da zu dem Zeitpunkt, wo das Geschoß den Lauf verläßt, das Pulver noch nicht vollständig verbrannt ist, kann die Geschwindigkeit nicht nach der einfachen Formel berechnet werden.

Bei der Patrone 9,3 × 74 R, deren Werte wir der S. 31 angegebenen Rücklaufmessung entnehmen, erhalten wir folgende Werte beim Höchstdruck:

Geschwindigkeit $v_m$ in m/sec		Geschoßweg $s_m$ in mm		Zeit bis zur Erreichung des Höchstdruckes $t_m$ in $10^{-3}$ sec	
gem.	ber.	gem.	ber.	gem.	ber.
250	210	4,1	3,6	0,51	0,515

Bei Nitroglycerinpulver haben wir nach Cranz  $f = 9 \cdot 10^4 [m]$  und  $a = 8,5 m / \frac{kp}{cm^2}$ , außerdem ist  $K = 1,18$ . Für das Ngl.-Würfelpulver  $4 \times 4 \times 1$  finden wir den Wert

$$A = 0,566.$$

Mit diesen Konstanten haben wir die in der Tabelle 23 aufgeführten Werte für die leichte Feldhaubitze berechnet. (Die genauen Daten der Waffe sind S. 62 angegeben.)

Tabelle 23. Leichte Feldhaubitze

Ngl.-Würfelpulver  $4 \times 4 \times 1$ ,  $f = 9 \cdot 10^4$  [m],  $a = 9,8 \left[ \frac{\text{m}}{\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}} \right]$ ,  
 $K = 1,18$  und  $A = 0,566$ .  $W_a = 1,085 \cdot 10^{-1}$  [m];  $s_0 = 0,98$  [m]

Ladung $Lg$ in kp	Geschossgewicht $p$ in kp	Mündungsgeschwindigkeit $v_0$ in m/sec		Höchstdruck in kp/cm <sup>2</sup>	
		gem.	ber.	gem.	ber.
0,37	15,8	301	290	2476	3100
0,215	15,8	212	206	1124	1040
0,155	15,8	172	172	710	510

Obwohl wir in unseren Beispielen ganz extreme Fälle wählten, sieht man, daß die Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Werten recht befriedigend ist.

## VI. Weitere Aufgaben der inneren Ballistik

### 1. Einpreßwiderstand und Geschoßreibung

a) Allgemeine und geschichtliche Behandlung der Aufgabe. Bei der Behandlung der Lösungen des innerballistischen Hauptproblems haben wir, mit Ausnahme der Lösung von Langweiler, die Reibung nicht in die Formeln eingeführt. Dem Einfluß der Reibung wurde durch die Einführung einer fiktiven Geschoßmasse oder durch die entsprechende Wahl der Pulverkonstanten Rechnung getragen. Auch Langweiler hat die Reibung nur sehr summarisch in seinen Berechnungen in Betracht gezogen. Durch eine systematische Berücksichtigung der Reibung, die allerdings eine genaue Kenntnis der Reibungsvorgänge voraussetzt, könnte die Leistungsfähigkeit der Formelsysteme sicherlich noch gesteigert werden. Auf der anderen Seite ist die Abnutzung des Rohres durch die Reibung außerordentlich wichtig, volkswirtschaftlich wie auch wehrtechnisch, da mit ihr die Lebensdauer des Rohres und damit der Ersatz und der Nachschub eng verknüpft ist.

Es hat in der ballistischen Forschung nicht an Versuchen gefehlt, die Reibungsverhältnisse zu klären. Sébert<sup>59)</sup> hat schon 1881 versucht, auf empirischem Wege die Reibung zu ermitteln. In das Geschoß, mit dem die Reibung beim Schuß gemessen werden soll, sind zwei Registriervorrichtungen eingebaut. Das Geschoß ist hohl und enthält im Innern eine breite Führungsstange, auf der in Richtung der Seelenachse ein Reiter reibungslos gleiten kann. An dem Reiter ist eine Stimmgabel angebracht, die ihre Schwingungen auf eine berußte Fläche der Stange schreiben kann. Bewegt sich das Geschoß, so bleibt der Reiter infolge seiner Trägheit stehen und zeichnet auf diese Weise die Zeit-Wegkurve des Geschosses auf. Aus der zweimaligen Differentiation dieser Kurve erhält man die Kraft, die die Geschoßbeschleunigung hervorruft ( $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ). Diese Kraft ist aber gleich der Kraft der Pulvergase ( $Pq$ ), vermindert um die Reibung ( $R$ ):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Pq - R$$

---

<sup>59)</sup> Sébert, *Essai d'enregistrement de la loi du mouvement des projectiles*. Paris 1881.



Um den Druck der Pulvergase zu ermitteln, ist im Boden des Geschosses ein Stempel angebracht, der sich dem Druck der Pulvergase entsprechend reibungslos in Richtung der Seelenachse bewegen kann. Der Stempel ist ebenfalls mit einer Stimmgabel versehen, deren Schwingungen im Geschößinnern aufgezeichnet werden. Ist  $q_{st}$  der Querschnitt und  $m_{st}$  die Masse des Stempels, so erhält man den Gasdruck  $P$  aus

$$P q_{st} = m_{st} \frac{d^2(x + y)}{dt^2}.$$

Hierbei ist  $x + y$  der Weg des Stempels in bezug auf das Rohr. Da alle Größen bekannt oder meßbar sind, kann man nach dieser Methode die Reibung beim Schuß bestimmen. Es läßt sich bei den Versuchen nicht vermeiden, daß die

Registriervorrichtung beim Auffangen des Geschosses oft unbrauchbar oder beschädigt wird, außerdem treten häufig mechanische Störungen durch Klemmungen auf. Das Verfahren konnte sich deshalb nicht durchsetzen.

Wegen der großen Schwierigkeiten der Reibungsbestimmung beim Schuß haben sich viele Autoren mit der theoretischen Behandlung des Problems beschäftigt oder die Reibung und vor allem den Einpreßwiderstand durch statische Versuche ermittelt.

Von den theoretischen Arbeiten wollen wir die Arbeit von Justrow<sup>60)</sup> näher behandeln.

Wenn wir uns die Innenfläche eines Rohres auf eine Ebene abgewickelt denken, so stellt beispielsweise die Kante eines Feldes eine Kurve, die sogenannte Zugkurve, dar. Diese Kurve ist bei konstantem Drall eine Gerade. Denken wir uns einen Punkt auf dem Führungsband einer Granate oder auf der Mantelfläche eines Gewehrgeschosses markiert, der in einem Augenblick mit einem Punkt ( $H$ ) der Zugkurve zusammenfällt, so würde er bei der Vorwärtsbewegung eines Geschosses auf der Kurve bleiben. Wir nehmen bei der Zugkurve

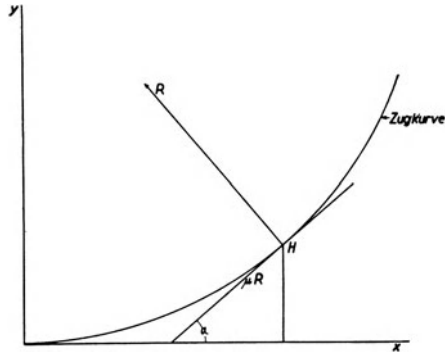


Abb. 26. Zugkurve

<sup>60)</sup> Justrow, Theoretische Betrachtungen über die Lebensdauer unserer Geschütz-, Minenwerferrohre, Gewehr- und Pistolenläufe, und über deren Beziehung zur Geschößführung. Charlottenburg, Verlag „Offene Worte“, 1923.

(Abb. 26) den Geschößweg ( $x$ ) als Abszisse und die Drehbewegung ( $y$ ) als Ordinate, und bezeichnen mit  $R$  den Druck, den das Geschöß auf die Leisten ausübt, und mit  $P$  den augenblicklichen Gasdruck auf den Geschößboden vom Querschnitt  $q$ . Der Leistendruck  $R$  ruft eine senkrecht zu ihm gerichtete Reibungskraft  $\mu R$  hervor. Wenn  $\alpha$  der Winkel der Tangente an die Zugkurve  $H$  ist, erhalten wir mit  $P_x = Pq$  folgende Kräftebeziehungen:

$$\begin{aligned}\sum(x) &= P_x - R \sin \alpha - \mu R \cos \alpha \\ &= P_x - R (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = M \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \frac{D}{2} \sum(y) &= \frac{D}{2} (R \cos \alpha - R \mu \sin \alpha) \\ &= \frac{D}{2} R (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = J \frac{dw}{dt} = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.\end{aligned}$$

Hierbei ist  $M$  und  $D$  die Masse und der Durchmesser des Geschößes,  $\frac{dw}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  die Drehbeschleunigung,  $J$  das Trägheitsmoment des Geschößes und  $\varphi$  der Winkel, um den sich das Geschöß bis zur Zurücklegung des Weges  $x$  bewegt hat. Demnach ist  $y = \varphi \frac{D}{2}$  also

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d\varphi}{dt} \frac{D}{2} = w \frac{D}{2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{2}{D} \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt},\end{aligned}$$

da  $\frac{dy}{dt} = \operatorname{tg} \alpha$  und  $\frac{dx}{dt} = v_x$  ist, ergibt sich

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{D} \operatorname{tg} \alpha v_x,$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{2}{v} \left( \operatorname{tg} \alpha \frac{dv_x}{dt} + v_x \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{2}{D} \left[ \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right].$$

Berücksichtigen wir bei der Bewegung des Geschößes in der  $x$ -Richtung die Kraft, die zum Einpressen des Geschößes in die Züge notwendig ist durch Vergrößern der Geschößmasse,  $M = M(1 + \zeta)$ , so erhalten wir schließlich

$$\sum(y) = \frac{D}{2} R (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = J \frac{2}{D} \left( \operatorname{tg} \alpha \frac{P_x}{M(1 + \zeta)} + v_x^2 \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right)$$

und damit

$$R = \frac{4J}{D} \left[ \operatorname{tg} \alpha \frac{P_x}{M(1 + \zeta)} + v_x^2 \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right].$$

Setzen wir  $1 + \zeta = 1,1$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $P_x = P \cdot 0,8 D^2$ ,  $\alpha = 7^\circ$ , also  $\cos \alpha + \mu \sin \alpha = 0,97$ , dann wird

$$R = 1,03 \frac{J}{M} \frac{4}{D^2} \left[ 0,73 D^2 P_x \operatorname{tg} \alpha + v_x^2 M \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} \right].$$

Für konstanten Drall vereinfacht sich die Beziehung zu

$$R = 3 \frac{J}{M} P_x \operatorname{tg} \alpha.$$

Beim parabolischen Drall ( $y = x^2/k$ ) wird  $\operatorname{tg} \alpha = 2x/k$ , wenn der Drallwinkel  $\alpha$  für die Länge  $s$  von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$  wächst:

$$\frac{d \operatorname{tg} \alpha}{dx} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{s}.$$

Wir erhalten demnach beim parabolischen Drall

$$R = 1,03 \frac{J}{M} \frac{4}{D^2} \left[ 0,73 D^2 P_x \operatorname{tg} \alpha + v_x^2 \frac{M (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1)}{s} \right].$$

Dies sind die Formeln für den Leistendruck, wenn die Züge schon eingeschnitten sind.

Betrachten wir noch das Kräftespiel beim Einschneiden der Züge im Übergangskonus. Die Quetschbelastung oder Einpreßkraft  $K_q$ , sowie der daraus folgende Reibungswiderstand, liegen nicht in der  $x - y$ -Ebene, sie sind Raumkräfte. Wenn  $\beta$  der Winkel des Übergangskegels ist, entfallen auf die  $x - y$ -Ebene die Kraftkomponenten

$$K_q \sin \beta \quad \text{und} \quad \mu K_q \cos \beta.$$

Wir haben dann den Leistendruck in der  $y$ -Achse um

$$\frac{K_q \sin \alpha (\sin \beta + \mu \cos \beta)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

zu vermehren. Hierbei können wir in erster Annäherung  $\cos \alpha - \mu \sin \alpha = 1$  setzen. Da  $K_q$  die Quetschbelastung der Flächeneinheit ist, muß obiger Betrag noch mit der Fläche des Führungsteiles (-bandes)  $f$  multipliziert werden.

Die reine Reibung ist beim Höchstdruck  $P_x = P_{max}$  am stärksten; wir erhalten demnach für den Höchstwert der Reibung

$$R = \frac{3 J}{M} \frac{P_{max} + K_q \sin \alpha (\sin \beta + \mu \cos \beta) f}{n b t}.$$

Hierbei ist  $n$  die Zahl der Züge,  $b$  die Breite des Führungsteiles,  $t$  die Zugtiefe und  $f = nbt$ .

Es soll noch erwähnt werden, daß sich auch Lorenz<sup>61)</sup> und Nowakowski<sup>62)</sup> mit diesem Problem beschäftigt haben. Nowakowski hat neben der Aufstellung von Näherungsformeln für den Einpreßwiderstand versucht, den theoretisch bestimmten Widerstand in sein Formelsystem zur Lösung des innerballistischen Hauptproblems mit einzubeziehen. In neuester Zeit sind auf theoretischem Gebiete Arbeiten von Voituriez<sup>63)</sup> und Gabeaud<sup>64)</sup> erschienen.

Die einfachste statische Methode zur Bestimmung des Widerstandes ist die Fallhammermethode, bei der das Geschoß durch Hammerschläge sukzessive durch das Rohr getrieben wird. Aus dem Arbeitswegdiagramm kann man den Einpreßwiderstand und die Reibung berechnen. Diese Methode ist aber sehr ungenau und die damit erhaltenen Werte schwanken stark. Horstig<sup>65)</sup> und Libessart<sup>66)</sup> bestimmen die Reibung dadurch, daß sie das Geschoß mit Hilfe eines Stempels oder direkt mittels einer Preßflüssigkeit stetig durch das Rohr pressen. Horstig untersuchte in seiner Arbeit diese drei Methoden durch viele Versuche auf ihre Brauchbarkeit. Er findet, daß die Fallhammermethode für die Bestimmung des Einpreßwiderstandes und der Reibung ungeeignet ist, während das direkte Durchpressen mit Hilfe einer Flüssigkeit gute und dem Schuß ähnliche Ergebnisse liefert. Da jedoch beim Schuß durch die Schnelligkeit der Verformung, ferner durch die aufweitende Wirkung des hohen Gasdruckes auf das Rohr andere Verhältnisse vorliegen als bei der statischen Druckpressung, entwickelt Horstig noch das Verfahren des „scharfen Schusses“. Er mißt beim Schuß den Höchst- druck und die Mündungsgeschwindigkeit und bestimmt aus den Daten der Waffe und der Ladung nach dem Charbonnier-Schmitzchen Lösungsverfahren den verbrannten Bruchteil  $z_0$  der Pulverladung,

<sup>61)</sup> Lorenz, Ballistik, die mechanische Grundlage der Lehre vom Schuß. 2. Aufl. München-Berlin, Verlag Oldenbourg, 1917.

<sup>62)</sup> Nowakowski, Beitrag zur inneren Ballistik der Röhrenpulver. Mitt. über Art. u. Gen. W. 1917, S. 1135.

<sup>63)</sup> Voituriez, Le problem de la balistique intérieure et les résistances passives. Mém. de l'Art. française 4, 1925.

<sup>64)</sup> Gabeaud, Essai sur les avancements de ceinture. Mém. de l'Art. française 2, 1923, und Essai sur la théorie des résistances passives dans les bouches à feu. Mém. de l'Art. française 9, 1930.

<sup>65)</sup> Horstig, Über die Bestimmung des Einpreßdruckes von angesetzten Geschossen (Kaliber 7,7 cm). Diss. T. H., Braunschweig 1927.

<sup>66)</sup> Libessart, Mesure statique continue du forcement dans les canons. Mém. de l'Art. française 11, 1932.

der beim Beginn der Geschößbewegung verbrannt ist. Mit Hilfe der Abelschen Gleichung kann der Druck beim Beginn der Geschößbewegung und damit der Einpreßwiderstand bestimmt werden:

$$P = \frac{f \tilde{\omega}}{c - \eta \tilde{\omega}} z_0,$$

denn  $f$  und  $\eta$  sind bekannte Pulverkonstanten,  $\tilde{\omega}$  ist das Gewicht der Pulverladung und  $c$  der ursprüngliche Verbrennungsraum.

Mit den auf diese Weise gefundenen Werten hat Spetzler<sup>67)</sup> ein halbempirisches Formelsystem entwickelt, das allerdings nur für Geschosse mit Führungsringen gilt.

In den letzten zehn Jahren wurden verschiedene Verfahren zur dynamischen Bestimmung der Reibung entwickelt. Libessart<sup>68)</sup> hat ähnlich wie Sébert das Geschöß selbst zur Messung der Reibung benutzt (Abb. 27). In dem Geschöß, das in der Längsrichtung durchbohrt ist, kann sich ein Stempel reibungslos bewegen. Sowohl der Kopf des Stempels, als auch die Geschößspitze sind mit einer polierten Stahlkugel versehen. Diese Kugeln werden durch eine Lichtquelle (Sonne) bestrahlt und stellen so leuchtende Punkte dar. Auf diese Weise kann die Zeit-Wegkurve des Geschosses und des reibungslos bewegten Stempels optisch aufgezeichnet werden.

Bei diesen Versuchen muß das Rohr soweit abgeschnitten werden, daß die beiden Stahlkugeln aus dem Rohr herausragen. Libessart führte seine Versuche an einer 7,5 und 15,5 cm-Kanone durch. Infolge der abgeschnittenen Rohre kann die Reibung aber nur über einen kurzen Weg verfolgt werden.

Cranz und Schardin<sup>69)</sup> haben eine Methode ausgearbeitet, mit der die Reibung beim Schuß gemessen werden kann. Der Verbrennungsraum, der mit dem Lauf fest verbunden ist, hat auf der dem Lauf gegenüberliegenden Seite eine Bohrung vom gleichen Durchmesser wie die lichte Weite des Laufes. In dieser Bohrung wird ein Stempel mit einer schweren Masse reibungs- und klemmungsfrei geführt. Durch diese Anordnung wirkt auf das Geschöß und den Stempel die gleiche Kraft  $Pq$ . Der Lauf mit dem Verbrennungsraum und dem Stempel wird an vier Drähten so aufgehängt, daß er stets eine

<sup>67)</sup> Spetzler, Über den Einpreßwiderstand von Geschossen in das Rohr und seine rechnerische Behandlung. Wehrtechn. Monatsh. 1936 und Diss. T. H., Berlin 1936.

<sup>68)</sup> Libessart, Accélérographe photographique à sphère polies. Mém. de l'Art. française 11, 1932.

<sup>69)</sup> Cranz u. Schardin, Eine neue Methode zur Messung der Geschößwiderstände im Rohr. ZS. f. techn. Physik 1932.

horizontale Bewegung ausführt. Die Waffe mit dem Stempel und dem Geschöß bildet ein abgeschlossenes System, bei dem nur innere Kräfte wirken. Würde die auf das Geschöß wirkende Kraft ganz zur Beschleunigung der Geschößmasse verwendet werden, so bliebe die Waffe beim Schuß in Ruhe, da aber ein Teil dieser Kraft zur

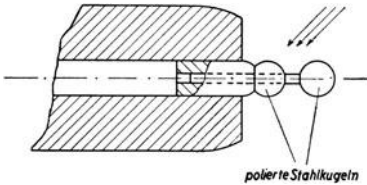


Abb. 27. Widerstandsbestimmung von Libessart

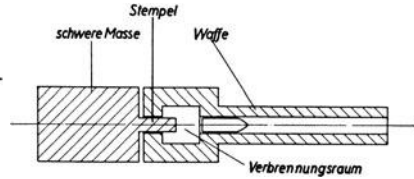


Abb. 28. Widerstandsbestimmung nach Cranz und Schardin

Überwindung der Reibung aufgewendet wird, muß sich zur Erhaltung des Schwerpunktes die Waffe in Richtung des Geschößes bewegen. Ist  $U$  die Masse des Stempels,  $p$  die des Geschößes und  $W$  die der Waffe, und sind  $x_m$ ,  $x_p$  und  $x_w$  die entsprechenden Wege, so erhalten wir

$$U x_m = p x_p + W x_w,$$

und daraus

$$U \frac{d^2 x_m}{dt^2} = p \frac{d^2 x_p}{dt^2} + W \frac{d^2 x_w}{dt^2} = P q;$$

hierbei ist  $W = \frac{d^2 x_w}{dt^2}$  gleich der Reibung.

Cranz und Schardin zeichnen die Zeit-Wegkurve der Waffe und des Stempels optisch auf und erhalten durch zweimalige Differentiation dieser Kurven die Reibung und den Gasdruck.

Bei dieser Versuchsanordnung kann keine normale Munition verschossen werden. Ferner muß das Geschöß angesetzt werden, wodurch die Verhältnisse wesentlich anders werden als beim normalen Schuß aus dem Gewehr. Außerdem traten anfangs bei größerer Ladung Klemmungen des Stempels und Longitudinalschwingungen auf. Erst durch einen stabileren Aufbau der Meßapparatur gelang es Che Pei Lo<sup>70)</sup>, die Störungen bei der Aufzeichnung zu beseitigen.

Die Cranz-Schardinsche Methode zur Bestimmung des Geschößwiderstandes hat Kutterer<sup>71)</sup> dahingehend geändert, daß

<sup>70)</sup> Che Pei Lo, Experimentelle Untersuchung des Laufreibungswiderstandes am Infanterie-Gewehr. Diss. Univ. Berlin 1936.

<sup>71)</sup> Kutterer, Messung des Geschößwiderstandes im Rohr. Wehrtechn. Monatsh. 39, 1935.

er die Beschleunigung der Waffe mit Hilfe eines piezoelektrischen Elementes direkt aufzeichnete. Auf die Waffe wird eine Hülse aufgeschraubt, in der ein Stempel reibungslos gleiten kann. Zwischen den Hülsenboden und den Stempel wird ein Piezoquarz gebracht. Bei der Beschleunigung der Waffe drückt der Stempel auf den Quarz und erzeugt eine elektrische Ladung, mit der über eine Elektrometer- röhre und ein Verstärker- system ein Braunsch'sches Rohr gesteuert werden kann. Da das System vom Stempel und piezoelektrischem Element nicht ideal starr gekoppelt ist, sondern elastische Schwingungen zuläßt, waren die Kurven gestört. Kutterer<sup>72)</sup> hat versucht, die Größe dieses Fehlers durch Störungs- rechnungen zu bestimmen und danach die gefälschten Kurven zu korrigieren. —

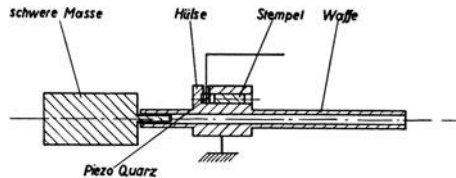


Abb. 29. Widerstandsbestimmung von Kutterer

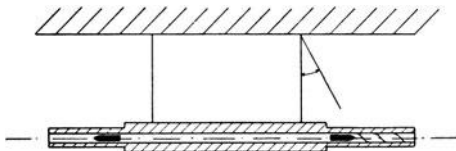


Abb. 30. Vorschlag zur Widerstandsbestimmung von Hänert

Mit dieser Versuchsanordnung ist es wohl möglich, die Reibung ohne zweimalige Differentiation einer Zeit-Wegkurve zu ermitteln, dafür müssen aber die Kurven durch ein nicht ganz einfaches Rechen- verfahren sehr weitgehend berichtigt werden.

Hänert<sup>73)</sup> hat den Vorschlag gemacht, die Reibung so zu be- stimmen, daß man aus einem Rohr, bei dem der Verbrennungsraum in der Mitte liegt und bei dem die eine Seite innen glatt und die andere mit Zügen versehen ist, gleichzeitig zwei Geschosse verfeuert. Wenn die Waffe aufgehängt wird, muß sie der Reibung entsprechend in Richtung des Geschosses im gezogenen Teil beschleunigt werden. Aus dem Ausschlag des Systems kann der Arbeitsbetrag bestimmt werden, der zur Überwindung der Geschoßreibung nötig war. Außer- dem könnte durch die zeitliche Aufzeichnung des Ausschlages die Zeit-Reibungskurve ermittelt werden. Die Versuche nach dieser Anordnung sind noch nicht durchgeführt worden.

<sup>72)</sup> Kutterer u. Schwarz, Über die Wiedergabe einer Gewehrgasdruck- kurve durch ein schwingungsfähiges Meßgerät. Wehrtechn. Monatsh. **39**, 1935.

<sup>73)</sup> Hänert, Über die Verwendung der Pendelkanone und des ballisti- schen Pendels. (Vorschlag zur Untersuchung der Reibungsarbeit in den Zügen.) Wehrtechn. Monatsh. 1935.

b) Experimentelle Methode zur Bestimmung der Geschoßreibung beim Schuß von Bollé-Bodlien. Herrscht in dem Raum zwischen Geschoß- und Laufboden der Druck  $P$ , so entspricht dem die Kraft  $K = Pq$ . Durch diese Kraft wird einmal die bewegte Masse  $m$  beschleunigt und muß außerdem die die Bewegung hemmende Reibung überwunden werden. Unsere Kraft- oder dynamische Gleichung lautet dann

$$K = Pq = m \frac{d^2 x}{dt^2} + R,$$

$$P = \frac{m}{q} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{q}.$$

In der Rücklaufmessung liegt eine Methode vor, um den Anteil des Gasdrucks zu messen, dem die Beschleunigung der bewegten

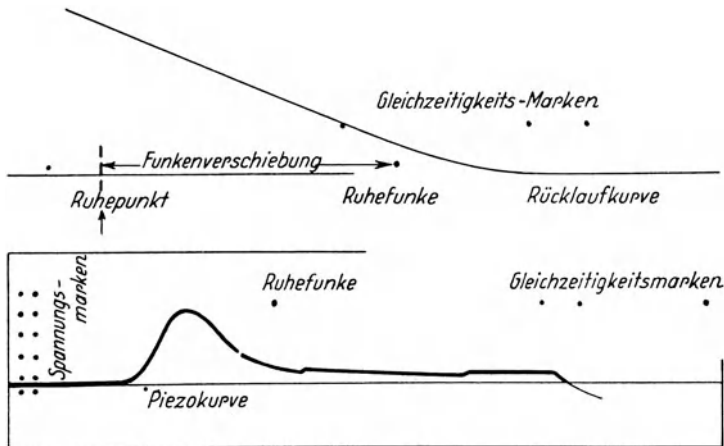


Abb. 31. Rücklaufkurve und dazugehörige Piezokurve

Masse entspricht. Ferner haben wir mit Hilfe des piezoelektrischen Druckmeßverfahrens die Möglichkeit, den durch die Verbrennung des Pulvers entstandenen Druck  $P$  zu ermitteln. Durch gleichzeitige Druckmessung nach diesen beiden Methoden kann man die Reibung bestimmen, und zwar sowohl in Abhängigkeit vom Geschoßweg, als auch von der Geschoßgeschwindigkeit und dem Gasdruck, da man durch die Rücklaufkurve die zeitliche Beziehung dieser Funktionen kennt. Diesen Weg habe ich zur Bestimmung der Reibung eingeschlagen. Bodlien<sup>74)</sup> hat das Verfahren weiter ausgebaut

<sup>74)</sup> Bodlien, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. **37**, 1939, Nr. 2—4, und Diss. Univ. Berlin 1938.



und die Reibung bei einigen Waffen bestimmt. Ich möchte noch erwähnen, daß W. Wolf schon 1907 auf diesen Weg hingewiesen hat, es fehlte ihm aber damals eine Methode, den absoluten Druck zu messen.

In den Tabellen 24 und 25 und Kurvendarstellungen Abb. 31 bis 34 sind die zusammengehörigen Geschößwege und -geschwindig-

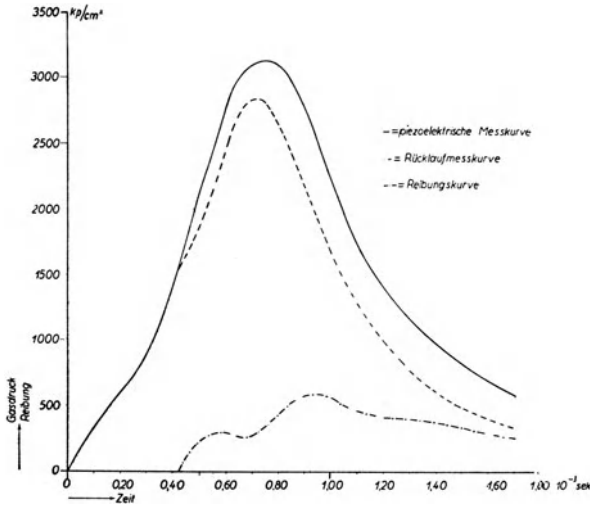


Abb. 32. Gasdruck- und Reibungskurven für die Büchse  $9,3 \times 74 R$ .  
Ladung 3,5 p Spezialpulver, Geschößgewicht 18,5 p

keiten, Gasdrucke und Reibungswerte für die Büchse  $9,3 \times 74 R$  (3,85 p Spezialpulver und 18,5 p Geschößgewicht) und  $6,5 \times 57 R$  (2,3 p Blättchenpulver 39 und 10 p Geschößgewicht) angegeben.

Tabelle 24. Büchse  $9,3 \times 74 R$   
Ladung 3,85 p Spezialpulver; Geschößgewicht 18,5 p

Zeit in $10^{-3}$ sec	Geschößweg in mm	Geschöß- geschwindig- keit in km	Gasdruck in $kp/cm^2$		Reibung in $kp/cm^2$
			Rücklauf- messung	piezoelektr. Messung	
0,09	1,8	14,8	300	280	—
0,26	6,1	45,2	714	715	—
0,43	17,4	102,5	1560	1760	200
0,60	43,7	219,7	2456	2745	289
0,77	92,4	375,7	2775	3140	365
0,94	165,7	507,6	1975	2610	635
1,11	258,1	594,4	1211	1700	489
1,28	360,5	649,8	840	1220	380
1,45	472,5	688,6	531	870	339
1,63	588,7	713,5	382	660	278

Tabelle 25. Büchse 6,5 × 57 R  
Ladung 2,3 p Blättchenpulver 39; Geschößgewicht 10 p

Zeit in 10 <sup>-3</sup> sec	Geschößweg in mm	Geschöß- geschwindig- keit in m/sec	Gasdruck in kp/cm <sup>2</sup>		Reibung in kp/cm <sup>2</sup>
			Rücklauf- messung	piezoelekt. Messung	
0,09		5	340	400	—
0,26	3,2	37	1024	1050	26
0,43	15,3	102	1340	1920	580
0,60	38,5	200	2358	2750	392
0,77	83,8	327	2514	3010	496
0,94	151	446	2265	2950	685
1,11	239	542	1458	2300	842
1,28	337	595	869	1580	721
1,45	442	632	559	1230	671
1,63	550	650	418	990	572
1,80	664	673	347	850	503

Um die verschiedenen Einflüsse auf die Reibung genauer unter-  
suchen zu können, wurden systematisch die einzelnen Faktoren

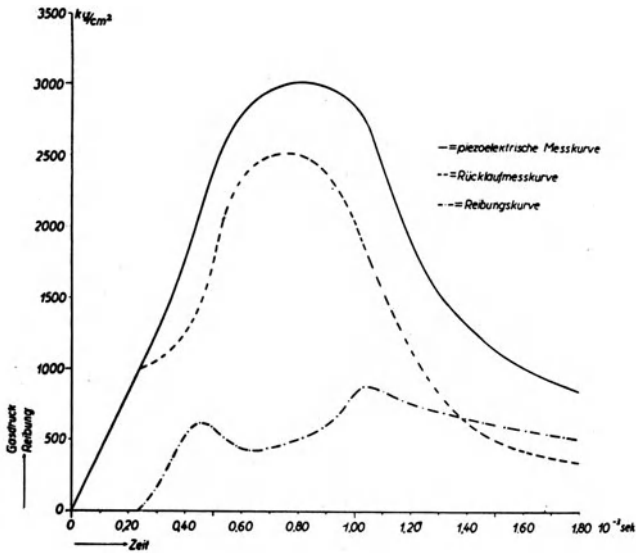


Abb. 33. Druck- und Reibungskurven für die Büchse 6,5 × 57 R.  
Ladung 2,3 p Blättchenpulver, Geschößgewicht 10 p

geändert. So wurden beim gleichen Geschöß die Ladung und damit die Geschößgeschwindigkeit und der Höchstdruck geändert. Dabei zeigte sich, daß das erste Widerstandsmaximum (Einpreßwiderstand) von der Ladung nahezu unabhängig ist, während das zweite Maximum

mit dem Höchstdruck zunimmt. Außerdem wurde die Geschloßform und damit die Führungslänge variiert. Die von Bodlien erhaltenen Ergebnisse sind in der Tabelle 26 angegeben. Da die Reibungswerte aus Differenzmessungen ermittelt werden, ist die Fehlergrenze und

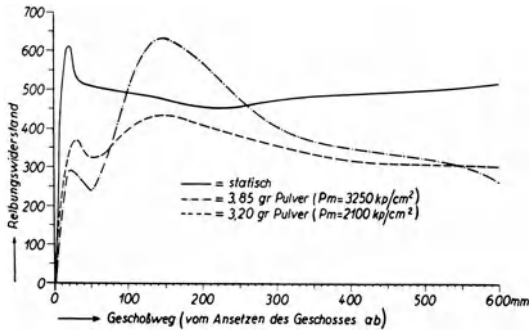


Abb. 34. Reibungskurven für Kal. 9,3. Geschloßgewicht 18,5 p

damit auch die Streuung ziemlich groß. Wir können deshalb über den Verlauf und den Einfluß der verschiedenen Größen nur ganz allgemeine Angaben machen.

Um neben den dynamischen Reibungswerten die statischen Daten zu erhalten, wurden mit Hilfe einer hydraulischen Presse die Geschosse durch die Versuchsläufe langsam durchgepreßt. Die Ergebnisse sind in der Kurvendarstellung Abb. 34 angegeben. Wir sehen, daß bei der statischen Durchpressung die Reibung an derselben Stelle wie beim Schuß einsetzt, zunächst stark ansteigt und nach Erreichung eines Höchstwertes auf einen Wert abfällt, der bis zur Mündung nahezu konstant bleibt. Im Gegensatz zum dynamischen Reibungsverlauf ist der Höchstwert des Einpreßwiderstandes bei der statischen Durchpressung größer und es fehlt hier das zweite Maximum. Bei der Büchse  $6,5 \times 57$  R war der statische Einpreßwiderstand so groß, daß es selbst bei einem Druck von  $1200 \text{ kp/cm}^2$  nicht möglich war, das Geschloß durchzudrücken.

Mit dieser statischen Methode wurde auch der Einfluß der Führungslänge auf den Einpreßwiderstand untersucht. Es zeigte sich, daß in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Horstig der Widerstand der Führungslänge direkt proportional ist.

Das nur beim Schuß auftretende zweite Reibungsmaximum ist sicherlich dem Leistendruck zuzuschreiben, der durch die Rotation des Geschosses zwischen dem Geschloß und den Feldern hervorgerufen wird. Es zeigte sich ja auch, daß es vom Gasdruck und damit von der Beschleunigung des Geschosses abhängt.

Tabelle 26. Widerstandswerte beim Schuß

Ladung in p	Höchstdruck in kp/cm <sup>2</sup>	Mündungs- geschwindig- keit in m/sec	Reibung in kp/cm <sup>2</sup>		
			1. Maximum	2. Maximum	beim Geschoß- austritt
Büchse 9,3 × 74 R					
18,5 g TM-Geschoß: Führungslänge 16,5 mm; Freiflug 13 mm					
Spez.-Pulver					
3,85	3330	725	310	620	310
3,5	2675	675	280	465	290
3,2	2100	610	320	420	290
16,7 g TM-Geschoß: Führungslänge 13 mm, Freiflug 13,5 mm					
4,0	3330	775	290	750	450
3,5	2930	725	290	530	310
3,0	1600	590	240	420	275
Büchse 6,5 × 57 R					
6,0 g TM-Geschoß: Führungslänge 11,0 mm					
Bl.-Pulver 39					
2,8	3570	950	440	720	560
Spez.-Pulver					
2,3	2420	820	380	650	500
2,0	1780	715	320	530	440
10 g TM-Geschoß: Führungslänge 22 mm					
Bl.-Pulver 39					
2,3	3400	675	720	950	600
Büchse 8 × 57 J					
10 g S-Geschoß					
Bl.-Pulver R 5					
3,2	3800	880	300	500	400

Einen sehr anschaulichen Beweis für den Einfluß des Leistungsdruckes haben wir in den aufgefangenen Geschossen (Abb. 35). In der gleichen Waffe wurden vorher ausgemessene Teil-Mantelgeschosse von genau gleichem Durchmesser statisch durchgepreßt und mit verschiedener Ladung verfeuert. Man sieht, daß die Führungskanten um so markanter ausgeprägt sind, je höher die Ladung und damit die Beschleunigung des Geschosses war. Bei dem Schuß mit 4 g Ladung waren die Einschnitte in den Mantel so tief, daß beim Auffangen des Geschosses der Mantel stets an der Einschnittstelle der Führungskanten zu Bruch ging. Ob noch andere Faktoren, wie die Stauchung des Geschosses, durch die hohe Beschleunigung oder die Atmung der Läufe usw. von Einfluß auf die Geschoßreibung und deren Verlauf sind, kann noch nicht gesagt werden. Dazu müßte mehr Versuchsmaterial vorliegen.

Wir können also den Verlauf der Geschoßreibung beim Schuß folgendermaßen deuten. Nach dem Freiflug des Geschosses beginnt das Einschneiden der Züge in das Geschloß; dieser Einpreßwiderstand überwiegt zunächst alle anderen Reibungsanteile. Mit der Rotation des Geschosses beginnt der Leistendruck, der eine Funktion der Beschleunigung bzw. des Gasdruckes ist und demnach am Anfang

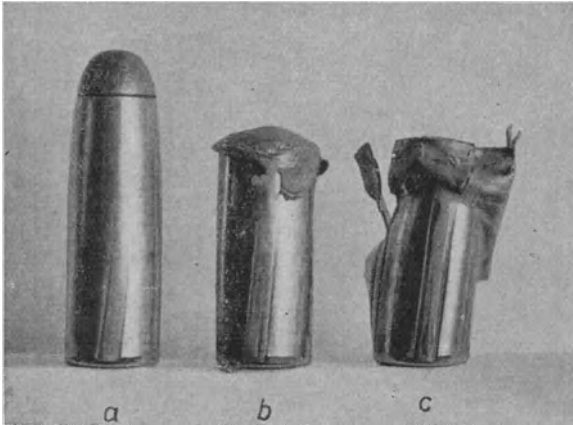


Abb. 35. Aufgefangene Geschosse.

a) Statisch durchgepreßt, b) mit 2 p Ladung, c) mit 4 p Ladung verschossen

keinen großen Einfluß besitzt. Die Reibung wird deshalb nach dem vollständigen Einschneiden der Züge geringer und steigt erst mit dem zunehmenden Gasdruck zum zweiten Höchstwert an. Es zeigt sich, daß der zweite Höchstwert der Reibung immer erst nach dem Höchstwert des Gasdruckes eintritt, was man vielleicht dadurch erklären kann, daß durch die Trägheit des Geschoßmaterials eine Phasenverschiebung eintritt.

## 2. Berechnung der Geschützrohre (Festigkeitslehre)

Die Methoden der rationellen inneren Ballistik, wie wir sie bisher kennengelernt haben, gestatten uns in erster Annäherung den inneren Aufbau (Verbrennungsraum, Kaliber, Rohrlänge usw.) eines Geschützes zu berechnen, wie er zur Erreichung eines bestimmten Zweckes nötig ist. Für den äußeren Aufbau, vor allem für die Berechnung der erforderlichen Wandstärken, ist eine Verbindung der Kenntnis des Gasdruckverlaufs mit der entsprechenden Beanspruchung des Rohres erforderlich. Wir wenden uns deshalb

jetzt der Berechnung der Beanspruchung bei gegebenem Innendruck zu.

Zunächst einige Erinnerungen aus der Elastizitätslehre<sup>75)</sup>. Nach dem Hookschen Gesetz ist

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \alpha \frac{P}{F} = \alpha \sigma.$$

Hierbei ist  $F$  der Querschnitt des Stabes,  $l$  die Länge,  $\lambda$  die Verlängerung,  $P$  die wirksame Kraft,  $\varepsilon$  die Dehnung,  $\alpha$  die Dehnungszahl und  $\sigma = P/F$  die Spannung. Der Stab erleidet bei der Verlängerung gleichzeitig eine Querschnittsverminderung. Bei einem zylindrischen Stab verkürzt sich der Durchmesser  $d$  um  $\delta$ ; es ist demnach

$$\varepsilon_a = \frac{\delta}{d}.$$

Das Verhältnis

$$m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_a}$$

der Längendilatation zur Querkontraktion ist eine Konstante; und beträgt bei Metallen  $10/3$ .

Betrachten wir einen Quader, dessen Seiten  $l_x$ ,  $l_y$  und  $l_z$  den Koordinatenachsen parallel sind. Die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$ , wirken auf die (je 2) Seitenflächen  $l_y l_z$ ,  $l_x l_z$  und  $l_x l_y$ . Unter der Spannung  $\sigma_x$  allein erleidet die Kante  $l_x$  die Dehnung  $\varepsilon_x = \alpha \sigma_x$ , die beiden anderen Kanten die Verkürzungen  $\varepsilon_x/m$ . Ebenso erleidet unter  $\sigma_y$  die Kante  $l_y$  die Dehnung  $\varepsilon_y = \sigma_y \alpha$ , die beiden anderen die Verkürzungen  $\varepsilon_y/m$ , endlich unter der Spannung  $\sigma_z$  die Kante  $l_z$  die Dehnung  $\varepsilon_z = \alpha \sigma_z$ , die beiden anderen die Verkürzungen  $\varepsilon_z/m$ .

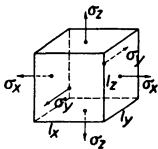


Abb. 36.

Die Gesamtdehnungen der drei Kanten  $l_x$ ,  $l_y$  und  $l_z$  unter gleichzeitiger Wirkung der Spannungen sind also

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m} = \alpha \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right), \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{m} = \alpha \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right), \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m} = \alpha \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right). \end{aligned}$$

<sup>75)</sup> C. Bach, Elastizität und Festigkeit. Berlin, Jul. Springer.

Die Beanspruchungen in den drei Richtungen, d. h. die Spannungen, die durch die Gesamtdehnungen geweckt worden sind, sind dann:

$$S_x = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m},$$

$$S_y = \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m},$$

$$S_z = \frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}.$$

Diese Formänderungen, die Längenänderungen sind, und die ihnen entsprechenden Spannungen sind aber nicht die einzigen, die bei elastischen Kräften in Betracht kommen.

Denken wir uns den Stab mit dem axialen Querschnitt  $F_0$  unter dem Winkel  $\varphi$  geschnitten. Die dehnende Kraft  $P$ , der die Spannung

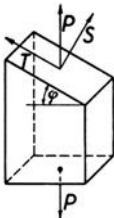


Abb. 37

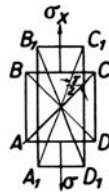


Abb. 38

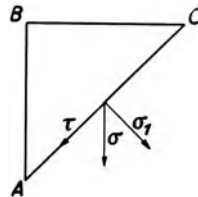


Abb. 39

$\sigma = P/F_0$  entspricht, können wir für diesen Querschnitt in die Komponenten  $S$  und  $T$  zerlegt denken (Abb. 37).

Dann wirkt auf die schräge Fläche die Normalspannung:

$$\frac{S}{F_0 \cos \varphi} = \frac{P \cos \varphi \cos \varphi}{F_0} = \sigma \cos^2 \varphi,$$

und die in der Fläche selbst liegende Schubspannung

$$\frac{T}{F_0 \cos \varphi} = \frac{P \sin \varphi \cos \varphi}{F_0} = \frac{\sigma}{2} \sin 2 \varphi.$$

Diese Schubspannung bewirkt eine Gleitung der Flächen. Sie treten natürlich immer paarweise auf, wie die Normalspannungen.

Sie müssen an einem unendlich kleinen Würfel angreifend eine Formänderung bewirken, die die ursprünglich rechten Winkel in schiefe umformt.

Betrachten wir nun einen Würfel, auf dessen Seitenflächen  $A D$  und  $B C$  die Spannungen  $\sigma$  wirken (Abb. 38). Dann werden die Seiten-

längen  $AB$  und  $CD$  von der Länge  $l$  auf  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  von der Länge  $l + \varepsilon$  gebracht, während sich  $AD$  und  $BC$  auf  $l - \varepsilon/m$  verkürzen; der ursprünglich rechte Winkel, den die Diagonalebenen  $AC$  und  $BD$  einschlossen, hat sich um  $\gamma$  geändert.

Da sich der halbe rechte Winkel um  $\gamma/2$  geändert hat, so ist

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{B_1C_1}{2}}{\frac{A_1B_1}{2}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Da  $\gamma$  sehr klein ist, kann man an Stelle des Tangens den Winkel setzen, und wenn man die Glieder mit  $\varepsilon\gamma$  vernachlässigt, erhält man schließlich

$$\gamma = \varepsilon \frac{m + 1}{m}.$$

Denken wir uns jetzt den Würfel in der Diagonalebene durchschnitten (Abb. 39). Die Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes wird die Anbringung einer Normalspannung  $\sigma_1$  und einer Schubspannung  $\tau$  erfordern.

$$\sigma_1 \overline{AC} \quad \text{und} \quad \tau \overline{AC},$$

also  $\sigma_1 \sqrt{2}$  und  $\tau \sqrt{2}$  müssen eine Resultante ergeben, die gleich  $\sigma$  ist; d. h.

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} &= \sigma, \\ \sigma_1 + \tau &= \sigma. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} - \tau \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}} &= 0, \\ \sigma_1 &= \tau, \end{aligned}$$

also

$$\tau = \frac{\sigma}{2}.$$

Die Winkeländerung ist der Schubspannung proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist die Schubzahl  $\beta$ :

$$\gamma = \beta \tau.$$

Da  $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ , folgt aus  $\gamma = \frac{m + 1}{m} \varepsilon$ :

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{\beta} \frac{m + 1}{m} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\alpha},$$

$$\beta = 2 \frac{m + 1}{m} \alpha;$$

die Schubzahl ist das  $2 \frac{m + 1}{m}$  fache der Dehnungszahl.



Nach dieser allgemeinen Einführung wollen wir uns unserem eigentlichen Ziel, der Berechnung der Rohrfestigkeit, zuwenden.

Wir betrachten einen zylindrischen Hohlkörper mit dem inneren Radius  $r_i$  und dem äußeren Radius  $r_a$  (Abb. 40). Die Länge  $x$  des Zylinders sei groß gegen  $r_i$ . Im Innern des Zylinders soll der Druck  $P_i$  und außen der Druck  $P_a$  herrschen. Wir wollen die auf die Wand des Zylinders wirkenden Spannungen und die dadurch hervorgerufenen Dehnungen berechnen.

Die Koordinatenachsen wollen wir so legen, daß die  $x$ -Achse mit der Mantellinie des Zylinders zusammenfällt (Abb. 41); die

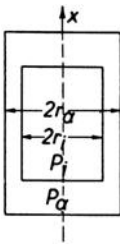


Abb. 40. Hohlkörper.  
Innendruck  $P_i$ , Außendruck  $P_a$

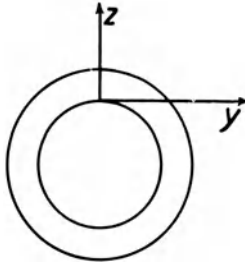


Abb. 41

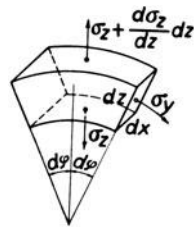


Abb. 42

$z$ -Achse verläuft dann in radialer und die  $y$ -Achse in tangentialer Richtung. Der Längenänderung in der  $z$ -Achse entspricht demnach die Änderung des Durchmessers und der in der  $y$ -Richtung eine Änderung des Umfanges.

Wir greifen das von dem Winkel  $2 d \varphi$  begrenzte Volumenelement von der Länge  $d x$  heraus (Abb. 42). Auf dieses Element wirken die Kräfte

$$\sigma_z z 2 d \varphi d x \quad \text{radial einwärts,}$$

$$\left( \sigma_z + \frac{d \sigma_z}{d z} d z \right) (z + d z) 2 d \varphi d x \quad \text{radial auswärts,}$$

$$\sigma_y d z d x \quad \text{senkrecht zu den beiden Flächen } d x d z.$$

Von den Kräften  $2 \sigma_y d z d x$  entfallen in die Richtung der  $z$ -Achse

$$2 \sigma_y d z d x \sin d \varphi.$$

Da die Summe der in gleicher Richtung wirkenden Kräfte Null sein muß, erhalten wir

$$\sigma_z z 2 d \varphi d x - \left( \sigma_z + \frac{d \sigma_z}{d z} d z \right) (z + d z) 2 d \varphi d x + 2 \sigma_y d z d x \sin d \varphi = 0.$$

Wenn wir für  $\sin d\varphi = d\varphi$  setzen und  $\frac{d\sigma_z}{dz} dz$  vernachlässigen, folgt

$$I. \quad \frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z} (\sigma_y - \sigma_x).$$

Nach dem oben Dargelegten erhalten wir für die Dehnung in den drei Richtungen

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = l = \alpha \left( \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m} \right)$$

und

$$\sigma_x = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left( \varepsilon_1 + \frac{l}{m-2} \right) = \frac{2}{\beta} \left( \varepsilon_1 + \frac{l}{m-2} \right),$$

und ebenso

$$\sigma_y = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left( \varepsilon_2 + \frac{l}{m-2} \right) = \frac{2}{\beta} \left( \varepsilon_2 + \frac{l}{m-2} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left( \varepsilon_3 + \frac{l}{m-2} \right) = \frac{2}{\beta} \left( \varepsilon_3 + \frac{l}{m-2} \right).$$

Im vorliegenden Falle ist, wenn sich  $z$  um  $\zeta$  und  $dz$  um  $d\zeta$  ändert:

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(z+\zeta) - 2\pi z}{2\pi z} \quad \text{und} \quad \varepsilon_3 = \frac{d\zeta}{dz}.$$

Hiermit wird

$$\varepsilon_1 = \frac{m-2}{2(m-1)} \beta \sigma_x - \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz},$$

und man erhält

$$\sigma_y = \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left( m \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} \right) + \frac{\sigma_x}{m-1},$$

$$\sigma_z = \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left( \frac{\zeta}{z} + m \frac{d\zeta}{dz} \right) + \frac{\sigma_x}{m-1}.$$

Nun ist beim Druck  $P_i$  und  $P_a$  bei gleichmäßiger Verteilung der Axialkraft  $\pi r_i^2 P_i - \pi r_a^2 P_a$  auf den Zylinderquerschnitt  $\pi r_a^2 - \pi r_i^2$  offenbar

$$\sigma_x \pi (r_a^2 - r_i^2) = \pi (P_i r_i^2 - P_a r_a^2),$$

$$\sigma_x = \frac{P_i r_i^2 - P_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

$\sigma_x$  ist also eine von  $z$  unabhängige Größe und danach  $\frac{d\sigma_x}{dz} = 0$ . Aus der Gleichung I erhält man bei Einführung der Werte von  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  und  $\frac{d\sigma_z}{dz}$  durch Integration

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\zeta}{z} = c_1 \quad \text{und} \quad \frac{\zeta}{z} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2}.$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  bestimmen sich dadurch, daß für  $z = r_i$ ,  $\sigma_z = P_i$  und für  $z = r_a$ ,  $\sigma_z = P_a$  sein muß, zu

$$c_1 = \frac{m-1}{m+1} \beta \left[ \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} - \frac{\sigma_x}{m-1} \right],$$

$$c_2 = \frac{P_i - P_a}{2} \beta \frac{r_a^2 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3}.$$

Unter Beachtung des Wertes von  $\sigma_x = \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3}$  ergeben sich hiermit die Gleichungen

$$\sigma_y = \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} + (P_i - P_a) \frac{r_a^2 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \frac{1}{z^2},$$

$$\sigma_z = \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} - (P_i - P_a) \frac{r_a^2 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \frac{1}{z^2}.$$

Daraus ergeben sich die Beanspruchungen bzw. Spannungen in Richtung der Achse des Zylinders, in Richtung der Tangente des Umfanges und in radialer Richtung gemäß  $\sigma_a = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$  zu

$$\sigma_a = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-2}{m} \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3},$$

$$\sigma_t = \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \frac{m-2}{m} \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} + \frac{m+1}{m} \frac{r_a^2 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} (P_i - P_a) \frac{1}{z^2},$$

$$\sigma_r = \frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \frac{m-2}{m} \frac{P_i r_i^3 - P_a r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} - \frac{m+1}{m} \frac{r_a^2 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} (P_i - P_a) \frac{1}{z^2}.$$

Setzen wir zunächst einmal  $P_a = 0$  (Atmosphärendruck gegenüber hohem Innendruck), so erhalten wir für  $\sigma_t$ , wenn wir die Spannung im Rohrrinnern ( $z = r_i$ ) betrachten

$$\sigma = \sigma_{t_i} = \frac{m-2}{m} \frac{P_i r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} + \frac{m+1}{m} \frac{r_a^2}{r_a^3 - r_i^3} P_i$$

und daraus

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{\sigma + (1-2/m) P_i}{\sigma - (1+1/m) P_i}}.$$

Hieraus folgt für  $m = 10/3$  die bekannte Bachsche Formel

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{\sigma + 0,4 P_i}{\sigma - 1,3 P_i}} = r_i \sqrt{\frac{K_z + 0,4 P_i}{K_z - 1,3 P_i}}$$

( $K_z$  höchstzulässige Spannung).

Wird  $r_a/r_i = \infty$ , so ergibt sich

$$\sigma - 1,3 P_i = 0$$

oder  $P_i = \sigma/1,3$ , d. h. ein endlicher Wert. Man kann also keineswegs durch Vergrößerung der Wandstärke ein einfaches Rohr beliebig haltbar machen.

Setzen wir in der allgemeinen Formel für  $\sigma_t$  wieder  $z = r_i$ , nehmen aber  $P_a$  als von Null verschieden an, so folgt nach einfacher Umrechnung

$$\frac{r_a}{r_i} = \sqrt{\frac{\sigma + P_i(1 - 2/m)}{\sigma - P_i(1 + 1/m) + P_a(2 - 1/m)'}}$$

wenn wir wieder die tangentielle Spannung an der inneren Rohrwand mit  $\sigma$  bezeichnen. Um ein kleineres Verhältnis von  $r_a/r_i$  zu

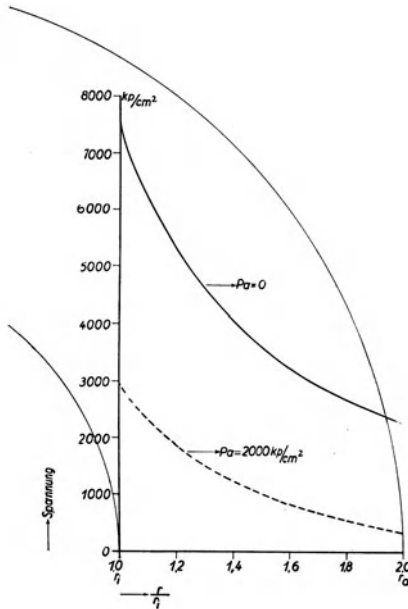


Abb. 43. Tangentielle Zugbeanspruchung bei einem Rohr mit  $r_a = 2r_i$  und einem Innendruck  $P_i = 4000$  kp/cm<sup>2</sup>.  
 ———  $P_a = 0$ , - - - -  $P_a = 2000$  kp/cm<sup>2</sup>.

erzielen, müssen wir einen Außendruck  $P_a$  herstellen. Dies tut man z. B., indem man über das Rohr noch ein zweites warm aufzieht.

Es sei nun  $P_i = P_0$ ,  $r_i = r_0$ ,  $r_a = r_i$  für das Kernrohr gegeben. Bezeichnen wir mit  $P_i = P_0$  den beim Schuß auftretenden Druck, und mit  $P_a = P_1$  den Druck an der äußeren Wand des Kernrohres, so gilt

$$r_1 = r_0 \sqrt{\frac{\sigma + P_0(1 - 2/m)}{\sigma - P_0(1 + 1/m) + P_1(2 - 1/m)'}}$$

Für den äußeren Radius ( $r_2$ ) des Mantelrohres, dessen innerer Radius ja auch gleich  $r_1$  ist, haben wir

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{\sigma + P_1(1 - 2/m)}{\sigma - P_1(1 + 1/m)}},$$

wenn wir mit  $\sigma$  jetzt schlechthin die überhaupt von uns zugelassene Spannung bezeichnen, die nirgends überschritten werden soll:

$$r_2 = r_0 \sqrt{\frac{[\sigma + P_0(1 - 2/m)][\sigma + P_1(1 - 2/m)]}{[\sigma - P_0(1 + 1/m) + P_1(2 - 1/m)][\sigma - P_1(1 + 1/m)]}}.$$

Wir bestimmen nun beim gegebenen Wert von  $r_0$ ,  $P_0$  und  $\sigma$  den Druck, den beim Schuß das aufgeschrunpfte Mantelrohr auf das Kernrohr ausübt, so daß  $r_2$  möglichst klein wird.

Aus  $\frac{dr_2}{dP_1} = 0$  ergibt sich

$$P_1 = \frac{1}{1 - 2/m} [\sqrt{\sigma P_0(1 - 2/m) + \sigma^2} - \sigma].$$

Mit diesem Wert von  $P_1$  erhalten wir für die Tangentialspannung am äußeren Umfang des Kernrohres, d. h. für  $z = r_1$ ,

$$S_1 = \frac{1}{r_1^2 - r_0^2} \left[ r_0^2 (P_0 - P_1) \frac{m + 1}{m} + (P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2) \frac{m - 2}{m} \right].$$

Ersetzen wir nun für das Mantelrohr  $\sigma_t$ ,  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $r_0$  und  $r_1$  durch  $S_1$ ,  $P_1$ , 0,  $r_1$  und  $r_2$ , so erhalten wir für die Spannung  $S'_1$  am inneren Umfang des Mantelrohres

$$S'_1 = \frac{P_1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ r_2^2 \frac{m + 1}{m} + r_1^2 \frac{m - 2}{m} \right].$$

Unter der Spannung  $S_1$  am Außenumfang des Kernrohres wird nun der Umfang gedehnt zu

$$U = 2 \pi r_1 + 2 \pi r_1 \alpha S_1.$$

Entsprechend wird unter der Spannung  $S'_1$  der Innenumfang des Mantelrohres

$$U' = 2 \pi (r_1 - \Delta r) + 2 \pi (r_1 - \Delta r) \alpha S'_1,$$

da ja im Normalzustand der Radius des Mantelrohres um  $\Delta r$  kleiner sein soll als der des Kernrohres.

Nun müssen im gespannten Zustand beim Schuß  $U$  und  $U'$  einander gleich sein, daraus folgt

$$\Delta r = \frac{S'_1 - S_1}{1 + S'_1 \alpha} r_1 \alpha.$$

Mit Einsetzung der Werte von  $S_1$  und  $S'_1$  ergibt sich

$$\Delta r = \left\{ \frac{\frac{P_1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ r_2^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) + r_1^2 \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \right] - \frac{1}{r_1^2 - r_0^2} \left[ r_0^2 (P_0 - P_1) \left( 1 + \frac{1}{m} \right) + (P_0 r_0^2 - P_1 r_1^2) \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \right]}{1 + \frac{P_1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ r_2^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) + r_1^2 \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \right]} \right\} \alpha r_1.$$

Da  $\alpha$  klein ist, kann man den Nenner gleich 1 setzen. Wenn wir in dieser Gleichung  $\overline{P_0} = 0$  setzen, so erhalten wir für  $P_1$  den Wert des Druckes  $\overline{P_1}$ , den das warm aufgezogene Mantelrohr nach dem Erkalten auf das Kernrohr ausübt. Es ergibt sich

$$\Delta r = \overline{P_1} \left\{ \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ r_2^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) + r_1^2 \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \right] + \frac{1}{r_1^2 - r_0^2} \left[ r_0^2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) + r_1^2 \left( 1 - \frac{2}{m} \right) \right] \right\} \alpha r_1,$$

und daraus

$$\overline{P_1} = \frac{\Delta r (r_2^2 - r_1^2) (r_1^2 - r_0^2)}{\alpha r_1 (r_2^2 - r_0^2) r_1^2 (2 - 1/m)}.$$

Wenn wir eine zulässige Spannung  $\sigma$  annehmen, so übt durch den Maximaldruck beim Schuß  $P_0$  das Mantelrohr auf das Kernrohr den Druck  $P_1$  aus; für den angestrebten Fall, daß  $r_2$  ein Minimum wird, ist  $P_1$  gegeben durch

$$P_1 = \frac{1}{1 - 2/m} [\sqrt{\sigma P_0 (1 - 2/m)} + \sigma].$$

Hiermit ist dann auch das Maß  $\Delta r$  gegeben, um welches (im kalten Zustande) der innere Radius des Mantels kleiner sein muß als der äußere des Kernrohres.

Wir kennen ferner noch den Druck  $\overline{P_1}$ , den bei dieser Konstruktion das Mantelrohr im Normalzustand, d. h. beim nicht schießenden Geschütz, auf das Kernrohr ausübt. Somit sind alle Daten für die Rohrkonstruktion bekannt.

Es ist nun leicht, die Verhältnisse zu berechnen, wenn man auf das Mantelrohr wieder ein zweites aufzieht und so fort. Wir brauchen dafür nur die Formel anzuwenden und das erste Mantelrohr als Kernrohr für das zweite Mantelrohr zu betrachten usw. Wir erhalten dann Reihen von Gleichungen für die Radien  $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ , für die Zwischendrucke  $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$  beim Schuß, für die Bedingung eines möglichst geringen Materialverbrauchs, für die Werte  $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3 \dots \Delta r_n$ , sowie für die Zwischendrucke im Normalzustand  $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}, \dots \overline{P_n}$ .

Es führt das auf geometrische Reihen. Ich verweise diesbezüglich auf das Buch von Hänert<sup>76)</sup>, wo diese Rechnungen durchgeführt sind. Zum Unterschied von den oben angegebenen Entwicklungen steht bei Hänert in mehreren Formeln der Faktor  $(1 - 1/m)$  statt  $(2 - 1/m)$ , weil dort nicht der Einfluß der Kräfte auf den Verschluß des Rohres berücksichtigt ist. Man kann so den Vorteil mehrerer Mantelrohre rechnerisch verfolgen und abwägen. Das Auftreten der geometrischen Reihe ermöglicht auch die Formel für eine unendliche Folge übereinandergeschichteter Rohre aufzustellen. Dieser Fall ist von praktischem Interesse, da bei der Kaltverfestigung oder Autofrettage ein derartiger Zustand vorliegt. Bei der Autofrettage erreicht man den Zustand unendlich dicht aufeinanderfolgender Schichten unter stetig veränderlichen Drucken dadurch, daß man ein Einblockrohr einem so hohem hydraulischem Druck aussetzt, daß die Verformungen über die Elastizitätsgrenze hinausgehen. Das Rohr erfährt auf diese Weise eine bleibende Durchmesservergrößerung und wird damit in einen Spannungszustand versetzt. Über den kaltverfestigten Zustand liegt noch keine genaue Kenntnis vor. Man weiß vor allem noch nicht, wie sich die Spannungen mit der Zeit ändern.

Wir haben ausgehend von der reinen Dehnungstheorie die Formeln für die Berechnung der Geschützrohre aufgestellt. Es ist von verschiedener Seite darauf hingewiesen worden, daß die damit berechneten Werte zu niedrig sind, d. h. daß man das Material bei mehrachsiger Beanspruchung, wie es ja auch bei einem Geschütz der Fall ist, nicht so hoch belasten kann. Schwinning<sup>77)</sup> hat die Spannungsformeln nach der Gestaltänderungstheorie aufgestellt und mit den nach der Dehnungstheorie berechneten verglichen. Auch Pohl<sup>78)</sup> hat seine Formeln nach der Gestaltänderungstheorie entwickelt. Versuche haben gezeigt, daß Geschützrohre einen Gasdruck aushalten, der den nach den Formeln der Dehnungstheorie berechneten höchstzulässigen Gasdruck um 60 % übersteigt.

Es erhebt sich noch die Frage, was für Festigkeitswerte der Berechnung der Geschützrohre zugrunde gelegt werden sollen. Allgemein wird angenommen, daß die Festigkeitswerte bei schneller und kurzzeitiger Beanspruchung höher liegen als bei dem statischen

---

<sup>76)</sup> Hänert, *Geschütze und Schuß*, 2. Aufl. Berlin, Verlag Jul. Springer, 1935.

<sup>77)</sup> Schwinning, *Konstruktion und Werkstoff der Geschützrohre und Gewehrläufe*. Berlin, VDI-Verlag, 1934.

<sup>78)</sup> Pohl, *Die Berechnung eines Gewehrlaufes*. Beiträge zur Ballistik und techn. Physik. Leipzig, Verlag J. A. Barth, 1938.

Versuch. Die Untersuchungen, die zur Entscheidung dieser Frage angestellt wurden, liefern aber sehr widerspruchsvolle Ergebnisse. Auf der anderen Seite hängt es von der Lösung dieses Problems ab, wie genau man die Geschützrohre berechnen kann.

### 3. Explosion und Detonation

Wir wollen zunächst die Thermochemie der explosiven und detonativen Verbrennungsvorgänge behandeln.

Bei der Behandlung des Verbrennungsgesetzes des Pulvers haben wir aus der verkürzten van der Waalsschen Gleichung

$$P(V - \alpha) = \frac{P_0 V_0}{273} T_0$$

die Abelsche Gleichung

$$P = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}$$

hergeleitet. In dieser Gleichung bedeuten  $\Delta$  die Ladedichte,  $\alpha$  das Kovolumen der Gase und  $f$  den spezifischen Druck

$$f = \frac{P_0 V_0}{273} T_0.$$

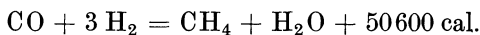
Um  $f$  zu berechnen, muß man demnach die Explosionstemperatur  $T_0$  und das Volumen  $V_0$  der von 1 kp Pulver entwickelten Gase kennen.

Bei der Verbrennung des Pulvers in der kalorimetrischen Bombe erhält man die Explosionswärme, zuzüglich der bei der Kondensation von Wasserdampf und der bei der Abkühlung der Gase eintretenden Verschiebung des Gasgleichgewichtes freiwerdenden Wärme. Außerdem kann man hierbei das Volumen der kalten (permanenten) Gase und deren Zusammensetzung ermitteln. In einzelnen Fällen, z. B. bei den Nitrozellulosepulvern, lassen sich die Verschiebungen des Gleichgewichtes einigermaßen übersehen und mit ziemlicher Sicherheit in Rechnung setzen. Wir wollen uns die Berechnung von  $V_0$  und  $T_0$  an einem Beispiel klarmachen.

Bei der Verbrennung von 1 g Nitrozellulose mißt man als Wärmetönung des ganzen Vorganges 936 cal. Das Volumen der permanenten Gase beträgt bei 0° C und 760 mm Hg 762,2 cm<sup>3</sup>, außerdem werden 0,13 p Wasser gebildet. Dieser Wassermenge entspricht ein auf 0° C und 760 mm Hg reduziertes Dampfvolumen von 162,2 cm<sup>3</sup>. Das Volumen der permanenten Gase erhöht sich deshalb auf 924,4 cm<sup>3</sup>. In der Tabelle 27 sind die Ergebnisse der Analyse zusammengestellt.



Zur Berechnung des Volumens  $V_0$  der Gase und deren Zusammensetzung müssen wir über die Reaktionen der Gase bei der Abkühlung und der Verschiebung des Gleichgewichtes gewisse Annahmen machen. Nach Poppenberg<sup>79)</sup> kann man annehmen, daß sich das ganze Methan erst bei der Abkühlung nach der Gleichung gebildet hat:



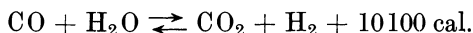
In der Tabelle 27 sind die reduzierten Molzahlen unter Berücksichtigung der Methanbildung angegeben.

Tabelle 27

	Permanente Gase		Reduzierte Molzahlen mit Berücksichtigung der		Reduziertes Volumen in cm <sup>3</sup>
	Volumen in %	Molzahlen	CH <sub>4</sub> -Bildung	Wassergasreaktion	
CO <sub>2</sub>	14,16	5,842	5,842	4,452	99,5
CO	39,99	16,50	16,76	18,15	405,0
H <sub>2</sub>	16,47	6,795	7,575	6,185	138,6
H <sub>2</sub> O	17,54	7,239	6,979	8,369	187,5
N <sub>2</sub>	11,19	4,615	4,615	4,615	103,6
CH <sub>4</sub>	0,63	0,26	—	—	—

zusammen: 934,2

Von weit größerer Bedeutung für die nachträgliche Änderung der Gaszusammensetzung ist die Wassergasreaktion:



Das Verhältnis der Konzentrationen der an der Reaktion beteiligten Molekülarten

$$K = \frac{(\text{CO})(\text{H}_2\text{O})}{(\text{CO}_2)(\text{H}_2)}$$

kann dem Verhältnis der Molzahlen gleichgesetzt werden. Nun wissen wir, daß  $K$  eine Funktion der Temperatur ist. Wir können nach Haber<sup>80)</sup> schreiben:

$$\log K = -\frac{2116}{T} + 0,783 \log T - 0,00043 T.$$

Für  $T_0 = 2500^\circ$  erhalten wir  $K = 5,5$ . Danach haben sich 1,39 Moleküle CO<sub>2</sub> nachträglich gebildet.

<sup>79)</sup> Poppenberg in Cranz, Lehrb. d. Ballistik 2, Berlin 1926.

<sup>80)</sup> Haber, Thermodynamik technischer Gasreaktionen. 1905.

In der Tabelle 27 sind die durch die Wassergasreaktion bedingten geänderten Molzahlen mit angegeben. In der letzten Kolonne dieser Tabelle sind die reduzierten Volumenwerte der einzelnen Gase unter Berücksichtigung der Methan- und  $\text{CO}_2$ -Bildung aufgeführt.

Von der gemessenen Wärmetönung sind für die Kondensation des Wasserdampfes, die Methanbildung, die  $\text{CO}_2$ -Bildung und die Wärmezufuhr durch die elektrische Zündung insgesamt 127 cal abzuziehen.

Die Explosionswärme beträgt demnach  $Q = 799$  cal. Die Explosionstemperatur  $T_0$  können wir berechnen aus

$$T_0 = \frac{Q}{c_m}.$$

Dabei ist  $c_m$  die mittlere spezifische Wärme des Gasgemisches. Für die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur erhalten wir, wenn wir für die einzelnen Gasarten die entsprechenden Werte einsetzen und die Molzahlen berücksichtigen

$$c_m = 0,2025 + 0,000033 T.$$

Mit diesem Wert von  $c_m$  berechnet sich die Explosionstemperatur zu

$$T_0 = 2733^\circ \text{ abs.} = 2460^\circ \text{ C.}$$

Wir haben nun alle Werte, um  $f$  zu berechnen. Wenn wir den Druck in  $\text{kp/cm}^2$  und die spezifischen Volumen in  $\text{cm}^3/\text{p}$  messen, erhalten wir

$$f = \frac{P_0 V_0}{273} T_0 = \frac{1,033 \cdot 934,2}{273} 2733 = 9658.$$

Um aus der Abelschen Gleichung den Druck berechnen zu können, müssen wir noch den Wert des Kovolumens kennen. Nach Sarrau kann man mit guter Annäherung  $\alpha$  als den tausendsten Teil des reduzierten Volumens von 1 p des Pulvers annehmen. Für Nitrozellulose ist demnach

$$\alpha = 0,93.$$

Beim Verbrennen von 2,5 p Nitrozellulosepulver in einer geschlossenen Verbrennungsbombe von 21,34  $\text{cm}^3$  Inhalt, wurde mit einem statisch geeichten Stauchzylinder ein Druck von 1134  $\text{kp/cm}^2$  gemessen, während wir mit den oben entwickelten Konstanten nach der Abelschen Gleichung bei einer Ladedichte von  $\Delta = 0,117$  einen Druck von 1272  $\text{kp/cm}^2$  berechnen.

Daß der gemessene Druck niedriger liegt als der berechnete, hat seinen Grund darin, daß der Stauchzylinder, wie wir schon im Kapitel II gesehen haben, einen zu niedrigen Druck mißt. Ferner spielt auch die Abkühlung der heißen Gase an den Metallflächen der Bombe eine große Rolle. Muraour<sup>81)</sup> hat diese Abkühlungs-

<sup>81)</sup> Muraour, *Mém. des poudres* **20**, 323, 1934, Nr. 3.

erscheinungen besonders untersucht. Wenn wir annehmen, daß durch diese Einflüsse der gemessene Druck um 10 % zu niedrig liegt, erhalten wir eine sehr gute Übereinstimmung des gemessenen und berechneten Druckwertes.

Bei Pulvern und Sprengstoffen, die nicht vollständig vergasen, sondern Rückstände hinterlassen, wie z. B. Schwarzpulver und die meisten Sprengstoffe beim Abbrennen in der kalorimetrischen und Druckbombe, hat  $\alpha$  eine andere Bedeutung; hier kommt zu dem Kovolumen der Gase noch das Volumen der festen Rückstände. Bei Schwarzpulver liegen die  $\alpha$ -Werte ungefähr bei 0,5.

Diese Druckentwicklung, wie überhaupt die Verbrennung in regelmäßigen Schichten, findet im allgemeinen bis zu ziemlich hohen Drucken statt, wenn sie im abgeschlossenen Raum der Bombe oder Waffe vor sich geht. Bei langen röhrenförmigen Räumen können Strömungen der gebildeten Gase die Gleichförmigkeit der Druckentwicklung stören und Wellendrucke auftreten, die Vieille<sup>82)</sup> nach einem allerdings noch unvollkommenen Verfahren schon frühzeitig untersucht hat. Es können dann an einzelnen Stellen Drucke von beträchtlicher Höhe entstehen. Z. B. beim Herausschießen eines steckengebliebenen Geschosses kann am Geschosßboden ein derartig hoher Druck entstehen, daß die Waffe platzt. Man darf weder diese Erscheinungen noch das Zerspringen von Waffen bei Verwendung von ungeeignetem Pulver ohne weiteres als Detonationen bezeichnen. Es sind einfach entweder durch die ungleichmäßige Verteilung und Strömung der Pulvergase, oder auf ganz erklärliche Weise nach den bisher erörterten Verbrennungsgesetzen hoch gesteigerte Drucke.

Die Detonation ist eine ganz andere Art der Verbrennung, auf die wir jetzt näher eingehen wollen, einmal, weil eben öfter, wenn auch meist in mißverständlicher Weise, von Detonationen auch bei Vorgängen in der Waffe gesprochen wird, und dann, weil man in den Lehr- und Handbüchern der inneren Ballistik auch diesen Gegenstand zu behandeln pflegt. Eine genauere Behandlung des Problems habe ich in dem Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik gegeben<sup>83)</sup>.

Wir haben im Kapitel IV gesehen, wie man aus den Druckdiagrammen, die man bei der Verbrennung von Pulver in geschlossener Bombe erhält, die Verbrennungsgeschwindigkeiten  $dc/dt$  als Funktion des Druckes ermitteln kann. Um eine Vorstellung von

<sup>82)</sup> Vieille, Mém. d. poudres et salp. **3**, 177, 1890.

<sup>83)</sup> Auerbach u. Hort, Handb. d. physik. u. techn. Mech. **6**, 310 bis 401, Leipzig 1927.

der Größenordnung zu geben, will ich den Fall eines Nitroglycerinpulvers (50 % Nitroglycerin und 50 % Nitrozellulose) anführen.

Tabelle 28

Druck in $\text{kp/cm}^2$	$de/dt$ in $\text{cm/sec}$
286	10,32
861	16,46
1178	26,93
2430	35,11

Wir sehen, daß es sich hier um kleine Geschwindigkeiten handelt. Wenn trotzdem der Druck in der Waffe oder geschlossenen Bombe sich in verhältnismäßig sehr kurzer Zeit entwickelt, so beruht dies darauf, daß der Weg, den die Verbrennung von der Oberfläche des Pulverelements aus bis zu seiner Verzehung zurückzulegen hat, ebenfalls sehr klein ist, also nach Millimetern zählt. Die Detonation des Pulvers oder eines Sprengstoffes ist demgegenüber dadurch gekennzeichnet, daß hier die Verbrennung den festen Sprengstoff mit viel höherer Geschwindigkeit, die Werte bis zu 8000 m/sec annimmt, durchläuft.

Um die Detonationserscheinungen weniger im Sinne einer Erklärung, die noch nicht völlig abgeschlossen ist, sondern in ihren tatsächlichen charakteristischen Zügen zu erfassen, wollen wir zunächst von den festen Sprengstoffen und Pulvern ganz abgehen, und uns zu den Gasexplosionen und Gasdetonationen wenden. Eigentlich hat die Erkenntnis der Detonation als einer besonderen Erscheinung von den Gasdetonationen ihren Ausgang genommen, die von Berthelot und Vieille entdeckt wurden. Verbrennt man ein Gasgemisch in geschlossener Bombe etwa durch Zündung im Mittelpunkt, so breitet sich die Flammenfront von diesem in Kugelschichten verhältnismäßig langsam aus, der Gasdruck steigt in meßbaren Zeiten an. Diese Gasdruckentwicklung ist vielfach untersucht worden. Insbesondere von Sarrau und Vieille und von Nernst und seinen Schülern<sup>84)</sup>, und in vielen neueren Arbeiten des In- und Auslandes. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von solchen Verbrennungen ist nach der photographischen Methode zuerst von Mallard und Le Chatelier<sup>85)</sup> untersucht worden. Vorher hatte Bunsen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit schon dadurch bestimmt, daß er die Ausströmungsgeschwindigkeit des Gasgemisches

<sup>84)</sup> Pier, ZS. f. Elektrochem. **15**, 336, 1909; **16**, 897, 1910; ZS. f. phys. Chem. **62**, 385; **66**, 759, 1909.

<sup>85)</sup> Le Chatelier, Ann. d. Mines **4**, 274, 1883.

von einem Brennen soweit verringert hat, bis ein Rückschlagen der Flammen eintrat. Die Ausströmungsgeschwindigkeit, bei der das Rückschlagen der Flammen eintrat, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verbrennung; bei Knallgas ergab sich eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 35 m/sec. Bei Mallard und Le Chatelier fand die Verbrennung in verhältnismäßig kurzen und teilweise offenen Rohren statt. Indem sie lange Rohre anwandten, entdeckten Berthelot und Vieille<sup>86)</sup> eine ganz andersartige Fortpflanzungsart der Reaktion in explosiblen Gasgemischen, die Detonation. Bei der Detonation des Knallgemisches beträgt die Verbrennungs- bzw. Detonationsgeschwindigkeit 2800 m/sec. Die photographische Methode wurde u. a. auch von Dixon<sup>87)</sup> beschrieben, aus dessen Veröffentlichungen die Abb. 44 entnommen ist. Auf einen rotierenden Film wird die beim Verbrennen des Knallgasgemisches auftretende Lichterscheinung optisch aufgezeichnet. Wir sehen, daß die Verbrennung nach beiden Seiten der Zündstelle mit gleicher und zunächst noch mäßiger Geschwindigkeit fortschreitet. Nach einer gewissen Verbrennungsdauer tritt eine beschleunigte Steigerung der Verbrennung (Krümmung der Kurve) ein, um dann mit der hohen und konstanten Detonationsgeschwindigkeit zu Ende zu brennen. Wir sehen weiter, daß in dem Augenblick, wo die Detonation eintritt, eine Lichterscheinung mit einer Geschwindigkeit, die von der Größenordnung der Detonationsgeschwindigkeit ist, in das verbrannte Gasgemisch zurückläuft. Es wird angenommen, daß dieses Leuchten durch die Stoßwelle erzeugt wird.



Abb. 44. Zeitlich aufgelöste Leuchterscheinung beim Verbrennen eines Knallgasgemisches. Die Zündstelle liegt am Gabelpunkt (Dixon<sup>87)</sup>)

Berthelot und Vieille suchten sich den Vorgang der Detonation durch kinetische Vorstellungen klarzumachen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Richtung der fortschreitenden Detonation ist hiernach die maximale Molekülgeschwindigkeit, die der Temperatur in dieser Richtung nach Clausius entspricht

$$D = 29,35 \sqrt{T/\varrho}$$

<sup>86)</sup> Berthelot u. Vieille, C. R. **93**, 1881; **94**, 1882.

<sup>87)</sup> Dixon, Phil. Trans. London **184**, 97, 1893; **200**, 315—352, 1903.

mit  $Q = Tc$ ; für  $c$  wählen Berthelot und Vieille  $c_v$  und setzen

$$D = 29,35 \sqrt{Q/c_v \rho}.$$

Wir prüfen diese Formel an einigen Beispielen.

Tabelle 29

Gasgemische	Detonationsgeschwindigkeit	
	gemessen	berechnet
$\text{CN}_2 + \text{O}_2$	2728	2361
$\text{H}_2 + \text{Cl}_2$	1729	1571
$2 \text{H}_2 + \text{O}_2 + 6 \text{H}_2$	3532	3028
$2 \text{H}_2 + \text{O}_2 + 5 \text{H}_2$	1701	1476

Dixon schließt sich diesen Betrachtungen an und gibt folgende Formel für die Detonationsgeschwindigkeit an:

$$D = 0,7 \cdot 29,35 \sqrt{\left[ 2 \left( \frac{Q}{c_v} + T \right) \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{\gamma-1} \right] / \rho}.$$

Tabelle 30

Gasgemische	Detonationsgeschwindigkeit		
	gemessen	berechnet nach	
		Berthelot	Dixon
$8 \text{H}_2 + \text{O}_2$	3532	3028	3516
$6 \text{H}_2 + \text{O}_2$	3527	3061	3571
$4 \text{H}_2 + \text{O}_2$	3268	3055	3585
$2 \text{H}_2 + \text{O}_2$	2821	2900	3416
$2 \text{H}_2 + 2 \text{O}_2$	2328	2252	2650
$2 \text{H}_2 + 4 \text{O}_2$	1927	1730	2024
$2 \text{H}_2 + 6 \text{O}_2$	1707	1476	1718

Wir sehen also, daß diese beiden Methoden nicht voll befriedigen. Wesentlich bessere Ergebnisse und auch eine tiefere Einsicht in die makroskopischen Erscheinungen und Vorgänge liefert die thermodynamisch-aerodynamische Theorie, die auf rein mechanische Vorgänge, nämlich die der ebenen Stoßwelle zurückgeht, die wir nun betrachten wollen, weil sie nicht nur für die Detonation von Gasgemischen, sondern auch für die Lufterschütterung von Wichtigkeit ist, die bei Explosionen in die freie Atmosphäre ausgesandt wird.

Riemann hat als erster die Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen unter der Voraussetzung gezeigt, daß die Amplituden, nicht, wie man in der Akustik annimmt, klein, sondern

beliebig groß sind. Er zeigte, daß eine Strömung von ursprünglich kontinuierlicher Verteilung von Druck und Dichte in eine unstetige übergehen kann<sup>88)</sup>.

Ich will auf diese Theorie hier nicht näher eingehen, sondern muß auf die Literatur verweisen. Diese diskontinuierlichen Drucksprünge pflanzen sich nach der Theorie mit einer Geschwindigkeit fort, die diejenige des Schalles um das Mehrfache übertreffen kann.



Abb. 45. Schematische Darstellung des Versuches von Vieille zur Erzeugung einer mechanischen Stoßwelle beim Bruch des Diaphragmas  $D$  durch Kompression der Luft in  $T_1$

Solche Drucksprünge kann man in der Natur herstellen, z. B. durch Explosionen, Detonationen von Pulvern und Sprengstoffen. Vieille<sup>89)</sup> hat Stoßwellen dadurch erzeugt, daß er Membranen bei einem bestimmten Druck platzen ließ und die Geschwindigkeit bestimmte, mit der sich die Stoßwelle fortpflanzt (Abb. 45).

In einem an beiden Seiten geschlossenen Stahlrohr von 22 mm Durchmesser und 4,5 m Länge befindet sich bei  $D$  eine Wand aus Kollodium. In dem Teil  $T_1$  ist komprimierte Luft, während die Luft in  $T_2$  unter normalem Druck steht. An den Stellen  $S_1$  und  $S_2$  befinden sich Meßapparate, um den Druckverlauf und die Zeit des Durchganges der Stoßwelle zu messen. Bei den Druckmeßapparaten wird über einen 5 g schweren Stempel von 1 cm<sup>2</sup> Querschnitt mittels einer Feder der Druckverlauf aufgezeichnet.

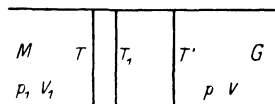


Abb. 46. Fortpflanzung eines Verdichtungsstoßes

Bei einem Druck von 29 kp/cm<sup>2</sup> platzte die Membrane; dabei wurde eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stoßwelle von 600 m/sec, also Überschallgeschwindigkeit, und ein Druck der Stoßwelle von 3,7 kp/cm<sup>2</sup> gemessen.

Crussard<sup>90)</sup> hat eine elementare Theorie aufgestellt. Betrachten wir einen solchen Verdichtungsstoß in einer Gassäule von 1 m<sup>2</sup> Querschnitt (Abb. 46), der Querschnitt  $T$  trennt die Masse  $M$  vom Druck  $P_1$  und der Dichte  $\delta = 1/V_1$  von der noch in Ruhe befindlichen Gassäule mit der Masse  $G$ , dem Druck  $P$  und der Dichte  $\rho = 1/V$ . Der Druckstoß pflanzt sich mit der Geschwindigkeit  $U$  fort, die Strömungsgeschwindigkeit der Gase  $M$  sei  $u$ . Vor einer Sekunde befand sich

<sup>88)</sup> Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen, 5. Aufl., 2, 507.

<sup>89)</sup> Vieille, Mém. des poudres et salpêtres 10, 172, 1899–1900.

<sup>90)</sup> Crussard, Bull. de la Soc. de l'industrie minerale 6, 1907.

die Wellenfront noch in  $T$ . Die Masse zwischen  $T$  und  $T'$ , durch welche die Welle geschritten ist, hatte vorher eine Länge von  $U$  Metern und das spezifische Volumen  $V$ , die materielle Grenzschrift  $T$  ist in der Zeit, in der die Welle von  $T$  nach  $T'$  gelangte, mit der Geschwindigkeit  $u$  bis  $T_1$  gekommen. Es ist nach Durchgang der Welle das Volumen  $U$  auf das zwischen  $T'$  und  $T_1$  liegende Volumen  $U - u$  verringert worden.

$$\text{I. } \frac{V_1}{V} = \frac{U - u}{U}.$$

Die Masse  $T_1 T$  besaß, als die Welle noch in  $T$  war, die Geschwindigkeit Null. Eine Sekunde später hat sie die Geschwindigkeit  $u$ . Die Masse war  $U \rho = u/V$ , die erworbene Bewegungsgröße ist  $u \frac{U}{V}$  und die Kraft  $P_1 - P$ , also

$$\text{II. } P_1 - P = u \frac{U}{V}.$$

Endlich haben wir noch die Energiegleichung nach Hugoniot. Es wurde die Arbeit  $P_1 u$  geleistet und der Masse  $U/V$  die Geschwindigkeit  $u$  erteilt. Die innere Energie der Masse zwischen  $T_1$  und  $T$  erhöht sich beim Übergang von  $P, U$  zu  $P_1, U - u$  und  $\frac{P_1(U - u) - P U}{K - 1}$  ist der innere Energiezuwachs, es folgt demnach

$$\text{III. } P_1 u = \frac{P_1(U - u) - P U}{K - 1} + \frac{1}{2} \frac{U}{V} u^2.$$

Aus II und III ergibt sich

$$\text{IV. } U^2 - K P V = U u \frac{K + 1}{2},$$

also

$$U^2 > K P V.$$

$\sqrt{K P V}$  ist die Schallgeschwindigkeit. Die Stoßwelle pflanzt sich mit der Überschallgeschwindigkeit fort. Man erhält aus I, II und IV

$$\text{H) } V(P_1 - P) - K P(V_1 - V) = (P_1 - P)(V_1 - V) \frac{K + 1}{2}.$$

Das ist die Hugoniot-Gleichung.

Bei dem obenerwähnten Versuch fand Vieille  $U = 600$  m/sec. Aus II und IV erhält man für atmosphärische Luft  $P = 3,6$  kp/cm<sup>2</sup>, gemessen wurde 3,7 kp/cm<sup>2</sup>.

Wenn wir ein explosives Gasgemisch haben, so steigert sich durch Wärmezufuhr die Reaktionsgeschwindigkeit, die Drucke steigen,



und wenn der Drucksprung hoch genug ist, entsteht eine solche Stoßdruckwelle. An deren Front findet die Reaktion statt, diese verhindert den Abfall von  $U$  und führt so zu der konstanten Detonationsgeschwindigkeit.

Ehe wir die Theorie der Detonation ausführlicher behandeln, müssen wir an Stelle der elementaren Theorie, die nur bis zu gewissen Druckgrenzen gilt, die genauere Theorie des Verdichtungsstoßes betrachten.

Es sei zur Zeit  $t$   $\Omega$  die Unstetigkeitsstelle, an welcher der Zustand 2, gekennzeichnet durch  $P_2$ ,  $u_2$  und  $V_2$ , sprunghaft in den Zustand 1 mit den Werten  $P_1$ ,  $u_1$  und  $V_1$  übergeht (Abb. 47). Wir betrachten mit Jouguet<sup>91)</sup> das Schicksal des unendlich kleinen Massenelements, welches zur Zeit  $t$  zwischen den Flächen  $w_2$  und  $w_1$  liegt, von denen das erste unmittelbar vor der Wellenfront steht, die zweite im Medium 1 gelegen

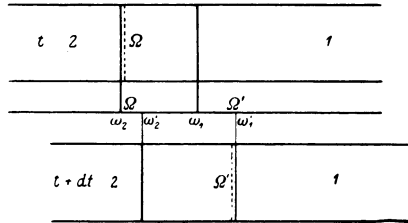


Abb. 47. Zur Fortpflanzung des stationären Verdichtungsstoßes

ist. Zur Zeit  $(t + dt)$  sei  $w_2$  nach  $w_2'$  und  $w_1$  nach  $w_1'$  gelangt und wir wollen die Länge  $w_1 w_2$  uns so gewählt denken, daß die Welle von  $\Omega$  nach  $\Omega'$  gelangt ist, so daß sie sich mit  $w_1'$  berührt, wenn diese Fläche eben noch im Medium vom Zustand 1 liegt.

Die auf ein raumfestes Koordinatensystem bezogene Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $D$  der Stoßwelle ist dann

$$D = \frac{dN}{dt} = \frac{\Omega \Omega'}{dt}.$$

Es ist, da  $w_2$  immer im Medium 2 und  $w_1$  immer in 1 bleibt,  $w_2 w_2' = u_2 dt$  und  $w_1 w_1' = u_1 dt$ . Die Geschwindigkeit  $dn_1/dt$  der Welle relativ zum Medium 1, und die Geschwindigkeit der Welle  $dn_2/dt$  relativ zum Medium 2 ist dann

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{dN}{dt} - u_1 = \frac{w_2 w_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dn_2}{dt} = \frac{dN}{dt} - u_2 = \frac{w_2' w_1'}{dt}.$$

Der Querschnitt bei  $\Omega$  sei wieder die Flächeneinheit. Zur Zeit  $t$  war die Masse des Raumelements zwischen  $w_1$  und  $w_2$ , die im Medium 1 lag,  $w_1 w_2 / V_1$ . Zur Zeit  $t + dt$  ist diese Masse nun ganz dem Zu-

<sup>91)</sup> Jouguet, Mécanique des explosives, p. 244. Paris 1917.

stand 2 angehörig durch  $w_1' w_2'$  auszudrücken. Es ergibt sich daher, da  $\frac{1}{V_1} \frac{w_1 w_2}{dt} = \frac{1}{V_2} \frac{w_1' w_2'}{dt}$ ,

$$\text{I. } \frac{D - u_1}{V_1} = \frac{D - u_2}{V_2} \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}).$$

Während der Zeit  $dt$  wirkt bei  $w_2$  auf den Querschnitt der Masse der Druck  $P_2$  und bei  $w_1$  der Druck  $P_1$ . Der auf die Masse  $\frac{1}{V_1} dn_1$  oder  $\frac{1}{V_2} dn_2$  wirkende Kraftimpuls ist also  $(P_2 - P_1) dt$ . Die Geschwindigkeitsänderung ist  $u_2 - u_1$ . Ihr Bewegungsmoment hat sich in  $dt$  um  $\frac{dn_1}{V_1} (u_2 - u_1)$  geändert und demnach ist

$$\text{II. } P_2 - P_1 = \frac{1}{V_1} (D - u_1) (u_2 - u_1) = \frac{1}{V_2} (D - u_2) (u_2 - u_1)$$

(Gleichheit der Bewegungsgrößen).

Den Massen zwischen  $w_1$  und  $w_2$  wird die Energie  $P_2 u_2 dt - P_1 u_1 dt$  zugeführt, die lebendige Kraft dieses Massenteiles hat sich um  $\frac{1}{V_1} dn_1 \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$  und ihre innere Energie um  $\frac{1}{V_1} dn_1 [E_2 - E_1]$  geändert, wenn  $E_2$  und  $E_1$  die der Masseneinheit entsprechenden Werte der inneren Energie im Zustande 1 und 2 bedeuten.

Da in dem Zeitelement  $dt$  keinerlei Wärmezufuhr oder -abfuhr stattfindet, so haben wir somit die Energiegleichung

$$\text{III. } P_2 u_2 - P_1 u_1 = \frac{1}{V_1} \frac{dn_1}{dt} \left[ E_2 - E_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right].$$

Aus den drei Gleichungen kann man leicht die Beziehungen

$$\frac{D - u_1}{V_1} = \frac{D - u_2}{V_2} = \frac{u_1 - u_2}{V_2 - V_1} = \frac{P_2 - P_1}{u_2 - u_1}$$

und

$$\frac{1}{2} (P_2 + P_1) (V_2 - V_1) = E_1 - E_2$$

ableiten.

Wir wollen das Medium 1 als ruhend annehmen, also die Fortpflanzung der Stoßwelle in einem anfänglich ruhendem Gase betrachten ( $u_1 = 0$ ), somit wird

$$\frac{D^2}{V_1^2} = \frac{P_2 - P_1}{u_2} \frac{u_2}{V_1 - V_2}$$

a)  $D = V_1 \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}}$

und

$$\text{b) } u_2 = W = (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}}.$$

Wir wollen ein Gas annehmen, daß der Zustandsgleichung

$$\text{c) } P \cdot V = R T$$

genügt und für welches

$$\text{d) } E_2 - E_1 = \bar{c}_v (T_2 - T_1),$$

wenn  $\bar{c}_v$  die mittlere spezifische Wärme zwischen  $T_2$  und  $T_1$  ist, außerdem gilt noch

$$\text{e) } \frac{1}{2} (P_1 - P_2) (V_2 - V_1) = E_1 - E_2.$$

Aus diesen fünf Gleichungen (a bis e) mit den fünf Unbekannten  $D$ ,  $W$ ,  $P_2$ ,  $V_2$  und  $T_2$  können wir vier Unbekannte berechnen, wenn wir  $P_2$  oder  $P_2/P_1$ , d. h. die Höhe des Drucksprungs der Stoßwelle kennen bzw. annehmen. Besonders einfach werden diese Berechnungen, wenn wir mit R. Becker<sup>92)</sup> die Größen  $\xi_1$  und  $\pi$  einsetzen

$$\xi_1 = \frac{2}{R} \bar{c}_v + 1 \quad \text{und} \quad \pi = \frac{P_2}{P_1};$$

es wird dann aus unseren Gleichungen (a bis d)

$$\frac{T_2}{T_1} = \pi \frac{\pi + \xi_1}{\pi - \xi_1 + 1}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \xi_1 + 1}{\pi + \xi_1},$$

$$W^2 = P_1 V_1 (\xi_1 - 1) \frac{(\pi - 1)^2}{\pi \xi_1 + 1} \quad \text{und} \quad D^2 = P_1 V_1 \frac{\pi \xi_1 + 1}{\xi_1 - 1}.$$

Wir müssen nun  $\xi_1$  als Funktion der Temperatur kennen, da ja  $c_v$  von der Temperatur abhängt. Für Stickstoff und Sauerstoff, also auch für Luft kann man  $T_1 = 273^\circ \text{C}$  gesetzt nach den Versuchen von Pier<sup>93)</sup> und Siegel<sup>94)</sup>,  $c_v = 5,82 + 0,46 T_2$  setzen. Man kann dann leicht für jeden angenommenen Wert von  $\pi = P_2/P_1$  aus der Gleichung für  $T_2/T_1$  mit  $T_1 = 273^\circ$   $T_2$  bestimmen. Mit  $T_2$  sind dann  $\xi_1$  und damit die linken Seiten der Bestimmungsgleichungen von  $V_1/V_2$ ,  $D$  und  $W$  gegeben.

Becker hat so für den Verdichtungsstoß in der Luft die folgende Tabelle berechnet.

<sup>92)</sup> R. Becker, Stoßwelle und Detonation. ZS. f. Physik **8**, 321–362, 1922.

<sup>93)</sup> Pier, ZS. f. Elektrochem. **15**, 536, 1909; **16**, 897, 1910.

<sup>94)</sup> Siegel, ZS. f. physik. Chem. **87**, 641, 1914.

Tabelle 31

$\pi = P_2/P_1$	$T_2/T_1$	$T_2$ absol.	$V_2/V_1$	$D$ m/sec	$W$ m/sec	$i/P_1 = (\pi - 1) v_1/v_2$	$T^0$ absolut bei adiabatischer Kompression
2	1,23	336	1,63	452	175	1,63	330
5	1,76	482	2,84	698	452	11,4	426
10	2,58	705	3,88	978	725	34,9	515
50	8,28	2260	6,04	2150	1795	296	794
100	14,15	3860	7,66	3020	2590	699	950
500	44,8	12200	11,15	6570	5980	5560	1433
1000	70,0	19100	14,3	9210	8560	14300	1710
2000	106,2	29900	18,8	12900	12210	37600	2070
3000	134,4	36700	22,3	15750	15050	66900	2180

In diese Tabelle ist noch die Größe  $i = P_2 - P_1 + \rho W^2 = (P_2 - P_1) V_1/V_2$  aufgenommen, die sich ja ebenfalls für gegebene Werte von  $P_2/P_1$  berechnen läßt.

Man nennt  $i$  den Gesamtimpuls der Stoßwelle. In der Tat setzt er sich ja aus dem Drucksprung  $P_2 - P_1$  der Welle und dem Bewegungsmoment der Gase hinter der Wellenfront zusammen. Die Masse der strömenden Gase hinter der Front ist (pro Flächeneinheit)  $\rho W$  und die Geschwindigkeit  $W$ . Das pro Zeiteinheit in der Welle erzeugte Bewegungsmoment ist also  $\rho W^2$ . Der gesamte Kraftimpuls, der für die Wirkung der Stoßwelle auf eine ihr entgegenstehende Fläche in Betracht kommt, ist also (pro Flächeneinheit)  $i = P_2 - P_1 + \rho W^2$ .

Bei dem vorher kurz erwähnten Versuch von Vieille hatten wir an einer Stelle des Rohres  $D = 600$  gefunden. Hierfür ergibt sich aus der Tabelle durch Interpolation leicht  $\pi = 3,8$  in guter Übereinstimmung in dem von Vieille registrierten Druck in der Welle  $3,7 \text{ kp/cm}^2$ . Für die Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich aus der Tabelle  $W = 341 \text{ m/sec}$ .

Bemerkenswert ist, wieviel höher die Temperatur in einer Stoßwelle ist, gegenüber der bei gleichem Druckverhältnis stattfindenden adiabatischen Kompression. Freilich schweben diese Temperaturen völlig in der Luft, da wir über die Zustandsgleichung der Gase bei Temperaturen über 3000 bis 10000° C und mehr nichts wissen.

Über die durch die Stoßwelle erzeugte Temperatur kann man vielleicht aus der spektrographischen Untersuchung der Leuchterscheinung Aussagen machen, aber die Kurzzeitigkeit des Vorganges und der Umstand, daß man mit den Meßinstrumenten nicht nahe

genug an den Sprengstoff herangehen kann, gestalten diese Untersuchungen sehr schwierig. Muraour und seine Mitarbeiter<sup>95)</sup> haben durch viele Versuche nachgewiesen, daß die bei der Detonation auftretende Lichterscheinung von dem Gas abhängt, das den Sprengstoff umgibt, also nicht das Licht der Flamme selbst ist. In einer Argonatmosphäre ist die Lichterscheinung am größten. Durch photographische Aufnahme der Detonationsvorgänge konnte festgestellt werden, daß das Leuchten ungefähr  $3 \cdot 10^{-6}$  sec dauert und vor der Ausbreitung der Gasschwaden stattfindet.

Der an der Front einer ein explosives Gasgemisch durcheilenden Stoßwelle erzeugten hohen Temperatur ist es zuzuschreiben, daß eine sofortige Reaktion herbeigeführt wird. Wenn wir die Theorie der Stoßwelle auf explosive Gasgemische anwenden, haben wir die thermodynamisch-aerodynamische Theorie der von Berthelot und Vieille entdeckten Detonation explosiver Gasgemische. Die Gleichungen sowie die Betrachtungen, welche zu ihnen führten, bleiben bestehen und wir haben nur

$$E_1 - E_2 = \bar{c}_v (T_2 - T_1) - Q$$

zu setzen, da die Änderung der inneren Energie nicht allein von der Temperaturänderung infolge der chemischen Reaktion in der Wellenfront herrührt. Wir haben also die Gleichungen

$$\text{I. } D = V_1 \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}},$$

$$\text{II. } W = (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}},$$

$$\text{III. } \bar{c}_v (T_2 - T_1) = Q + \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (V_2 - V_1) \quad [\text{H}],$$

sowie die Zustandsgleichung

$$\text{IV. } P_2 V_2 = R T_2.$$

Wenn wir  $\bar{c}_v$  als Funktion der Temperatur kennen, sowie  $Q$  aus dem chemischen Endprozeß, so haben wir für die Berechnung der fünf Unbekannten  $D$ ,  $W$ ,  $V_2$ ,  $P_2$  und  $T_2$  vier Gleichungen. Es fehlt uns zur vollständigen Berechnung noch eine fünfte Gleichung. Wir gelangen zu ihr am besten durch eine Überlegung von R. Becker. Zunächst können wir uns nach dem Vorgange von Crussard den Inhalt dieser Gleichungen graphisch veranschaulichen.

Die Gleichung III ergibt die sogenannte Hugoniot- oder  $H$ -Kurve, auf welcher der Punkt  $V_2, P_2$  liegen muß.

<sup>95)</sup> H. Muraour, J. de physique VII, 8, 1937 und C. R. 204, 576—579, 1937.

Der Punkt  $A (P_1, V_1)$ , der selbst nicht auf der Kurve liegt, aber sie durch  $P_1$  und  $V_1$  als Parameter bestimmt, stellt unseren Ausgangszustand dar. Eine Parallele durch  $A$  zur  $p$ -Achse trifft die  $H$ -Kurve in  $G$ , für welchen  $V_2 = V_1$  ist.  $G$  stellt uns den Zustand dar, der bei adiabatischer Verbrennung des Gasgemisches im eigenen Volumen erreicht wird. Der Fall  $P_2 = P_1$ , der durch den Punkt  $F$  dargestellt wird, entspricht andererseits der Verbrennung bei konstantem Druck, die hier bei Verdichtungsstößen im explosiblen Gemisch nicht in Betracht kommt. Betrachten wir nun einen Punkt  $B$  der  $H$ -Kurve, gekennzeichnet durch  $V_2$  und  $P_2$ . Der Winkel  $\alpha$ , den die Gerade  $AB$  mit der durch  $A$  gezogenen Gleichlaufenden zur  $P$ -Achse bildet, hat zur Tangente den Wert  $\frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2} = \operatorname{tg} \alpha$ . Die dem Punkte  $B$

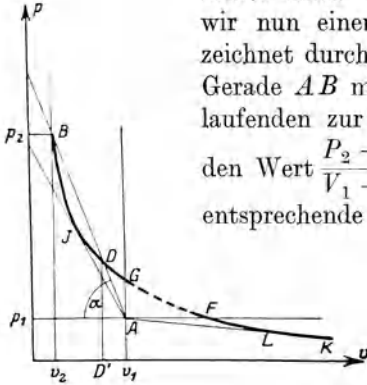


Abb. 48. Hugoniot-Kurve

entsprechende Detonationsgeschwindigkeit ist hiernach  $D = V_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ , die entsprechende Strömungsgeschwindigkeit  $W = (V_1 - V_2) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ . Da wir durch  $A$  eine unendliche Schar von Strahlen wie  $AB$  ziehen können, könnte man annehmen, daß es Detonationswellen mit einer

unendlichen Zahl verschiedener Werte der Detonationsgeschwindigkeit gibt, entgegen der Erfahrung, daß die Detonationsgeschwindigkeit eine charakteristische Konstante des Gasgemisches ist, die selbst bei Rohrlängen von 100 m und darüber gleich bleibt. Dies führt zu dem Gedanken, daß von den von  $A$  ausgehenden Strahlen eine einzige ausgezeichnete zu der physikalisch allein zu verwirklichenden Detonationsgeschwindigkeit führt. Unter allen ist aber nur die Tangente  $AJ$  ausgezeichnet, wenn wir Verdichtungen  $V_2 < V_1$  allein ins Auge fassen. Chapman<sup>96)</sup>, der zuerst auf dem schon von Vieille erkannten Zusammenhang zwischen Stoßwelle und Detonation eine Berechnung der Detonationsgeschwindigkeit durchführte, nahm daher einfach an, daß die Detonation durch den Punkt  $J$  der  $H$ -Kurve bestimmt sei. Diese Annahme entbehrt aber der aerodynamisch-thermodynamischen Begründung. Jouguet<sup>91)</sup> zeigte, daß die Erfahrung der Unabhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit von den Bedingungen hinter der Wellenfront und ihrer Konstanz bei der Fortpflanzung zu dem der Tangente  $AJ$

<sup>96)</sup> Chapman, Phil. Mag. 47, 90, 1899.

entsprechenden Wert der Detonationsgeschwindigkeit führt und leitet aus der Erfahrung zugleich die Bedingung ab, daß nur die der Tangente  $AJ$  entsprechende Detonation stabil ist. Diese Begründung scheint mir aber auch nicht befriedigend.

Wir wollen uns die Einsicht, daß nur der der Tangente  $AJ$  entsprechende Zustand zu verwirklichen ist, auf dem von R. Becker<sup>92)</sup> eingeschlagenem Wege verschaffen.

Die Gerade  $AB$  hat außer dem Punkt  $B$  ( $V_2, P_2$  und  $E_2$ ) noch den Punkt  $D$  ( $V'_2, P'_2$  und  $E'_2$ ) mit der  $H$ -Kurve gemein. Nach der Gleichung  $\frac{1}{2}(P_2 + P_1)(V_2 - V_1) = E_1 - E_2$  ist nun aber  $E_2 - E_1$  die Fläche des Trapezes  $AV_1V_2B$  und  $E'_2 - E_1$  die Fläche des Trapezes  $AV_1D'D$ . Daher ist auch  $E_2 - E'_2$  die Fläche des Trapezes  $DD'V_2B = \frac{1}{2}(P_2 + P'_2)(V'_2 - V_2)$ .

Aus dem bekannten Satz der Thermodynamik  $TdS = dE + PdV$  für die Entropie  $S$  folgt nun

$$\int_D^B TdS = \int_D^B dE + \int_D^B PdV,$$

wo die Integrale in Richtung der Geraden  $DB$  genommen sind. Das ergibt

$$\int_D^B TdS = E_2 - E'_2\text{-Fläche } DD'V_2B,$$

also

$$\int_D^B TdS = 0.$$

Wenn man nun  $B$  und  $D$  (durch Drehung des Strahles  $AB$  um  $A$ ) immer näher zusammenrücken läßt, geht die Gleichung

$$\int_D^B TdS = 0$$

in  $TdS = 0$  über. In  $J$  ist also  $dS = 0$ , d. h. die  $H$ -Kurve und die entsprechende Adiabate berühren sich in  $J$ . Nun kann aber all-

gemein  $\int_D^B TdS = 0$  nur erfüllt sein, wenn  $TdS$  längs der Geraden  $DB$

sein Vorzeichen wechselt. D. h. die Gerade  $DB$  muß die Adiabate in einem Punkt berühren. Denkt man sich also die Schar der Adiabaten in die Figur eingezeichnet, so müssen die Adiabaten oberhalb  $J$  in  $B$  steiler und unterhalb  $J$  in  $D$  flacher verlaufen als die Gerade  $DB$ . Bezeichnet man die Neigung der Adiabate mit

$\varphi = - \left( \frac{dP_2}{dV_2} \right)_{adiab}$ , so ist in  $B$   $\varphi > \operatorname{tg} \alpha$  und in  $D$   $\varphi < \operatorname{tg} \alpha$ , und das bleibt bestehen, wenn man durch Drehen der Sekante  $ADB$  die Punkte  $D$  und  $B$  auf  $J$  zuwandern läßt.

Wenn nun die Detonation durch das Gasgemisch läuft, so werden zwar die verbrannten Gase dicht hinter der Wellenfront die hohe Dichte  $1/V_2 = \varphi_2$  besitzen, sich aber weiter nach hinten abkühlen und zu expandieren suchen und sich diese Verdünnungswelle mit der den verbrannten Gasen entsprechenden Schallgeschwindigkeit in das Medium 2 fortpflanzen. Die Schallgeschwindigkeit ist aber für  $B$  ( $P_2, V_2$ ) gleich

$$\sqrt{\frac{dP_2}{d\varphi_2}} = \sqrt{\frac{dP_2}{d\frac{1}{V_2}}} = V_2 \sqrt{-\frac{dP_2}{dV_2}} = V_2 \sqrt{\varphi}.$$

Im Raum schreitet die Verdünnungswelle mit einer Geschwindigkeit fort, die gleich dieser Schallgeschwindigkeit vermehrt um die Strömungsgeschwindigkeit ist, also mit  $V_2 \sqrt{\varphi} + (V_1 - V_2) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ . Ist diese Geschwindigkeit größer als die Detonationsgeschwindigkeit  $D = V_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$ , so wird die Verdünnungswelle die Front der Detonationswelle erreichen, und der Druck  $P_2$  in ihr kann nicht aufrechterhalten bleiben.

Ist also  $V_2 \sqrt{\varphi} + (V_1 - V_2) \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} - V_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} = V_2 (\sqrt{\varphi} - \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}) > 0$  oder  $\varphi > \operatorname{tg} \alpha$ , so ist die Detonationswelle instabil.

Nun war aber oberhalb  $J$  also in  $B$   $\varphi > \operatorname{tg} \alpha$  und daher können oberhalb  $J$  die Detonationen nicht stabil sein.

In  $J$  ist  $\varphi = \operatorname{tg} \alpha$ , die Störungen laufen hinter der Detonationswelle mit gleicher Geschwindigkeit her, ohne sie zu erreichen (stationärer Zustand).

Es konnten nun noch Detonationswellen möglich und stabil sein, die einem Punkte  $D$  ( $V'_2, P'_2$ ) unterhalb  $J$  entsprechen.

Nun zeigt aber die vorhin abgeleitete Gleichung  $E_2 - E'_2 = \frac{1}{2} (P_2 + P'_2) (V'_2 - V_2)$  im Vergleich mit der Gleichung für eine rein mechanische Stoßwelle  $\frac{1}{2} (P_2 + P_1) (V_2 - V_1) = E_1 - E_2$ , daß die Zustände in  $B$  und  $D$  zueinander in demselben Verhältnis stehen, wie die Zustände vor und hinter einem rein mechanischen Verdichtungsstoß. Da aber beim Durchgang einer unstetigen Verdichtungswelle die Zustandsänderung nicht, wie Riemann annahm, adiabatisch erfolgt, so muß das von der Stoßquelle überholte Gas eine Entropieänderung, also Entropiezunahme erfahren, d. h. die Entropie ist in  $B$  größer als in  $D$ .



Es ist also mindestens wahrscheinlicher, daß eine Detonationswelle das von ihr erfaßte Gasgemisch nach der Verbrennung unmittelbar hinter der Wellenfront in einen Zustand  $B$  als in einen Zustand  $D$  versetzt. Nun ist aber, wenn  $B$  oberhalb  $J$  liegt, der Zustand  $B$  mit der ihm entsprechenden Detonationsgeschwindigkeit instabil. Eine Welle von konstanter Detonationsgeschwindigkeit kann also nur dem einzigen Punkt  $J$  selbst entsprechen.

Es ist also

$$\varphi = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2} = - \left( \frac{dP_2}{dV_2} \right)_{\text{adiab}} = \gamma_2 \frac{P_2}{V_2}.$$

Wir haben dann mit  $\gamma_2 = c_p/c_v$  die gesuchte fünfte Gleichung.

Setzt man  $\mu = V_1/V_2$ , so erhält man die zur Berechnung von  $D$  geeigneten Formeln

$$\alpha) \quad \bar{c}_v (T_2 - T_1) = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT = Q + \frac{1}{2} (\mu - 1) \left( R_2 T_2 + \frac{R_1 T_1}{\mu} \right),$$

$$\beta) \quad \gamma_2 \mu^2 - \mu (\gamma_2 - 1) + \frac{R_2 T_1}{R_1 T_2} = 0,$$

$$\gamma) \quad D^2 = \mu \gamma_2 R_2 T_2.$$

Wir wollen nun diese Gleichungen auf einige praktische Fälle anwenden. Wenn wir  $D$  in m/sec haben wollen, so müssen wir

$R_2 = \frac{8320}{M_2}$  setzen, wenn  $M_2$  das Molekulargewicht im Medium 2 bezeichnet. Da  $\alpha$ ) unverändert bleibt, wenn man statt des Kilogramms das Gramm als Masseneinheit einführt und die Gleichung mit  $M_2$  multipliziert, so kann man in  $\alpha$  alles auf das Grammolekel beziehen und schreiben  $M_2 c_v = \bar{C}_v$ , also

$$\alpha') \quad \bar{C}_v (T_2 - T_1) = M Q + \frac{1}{2} (\mu - 1) 1,985 \left( n_2 T_2 - \frac{n_1 T_1}{\mu} \right),$$

$$\beta') \quad \gamma_2 \mu^2 - \mu (\gamma_2 - 1) + \frac{n_1 T_1}{n_2 T_2} = 0.$$

Hierbei ist  $n_1$  und  $n_2$  die Anzahl der Grammolekel in 1 g des Gasgemisches vor und nach der Reaktion, d. h. die reziproken Werte der Molekulargewichte.  $M \cdot Q$  ist die Reaktionswärme in cal, die bei der auf Grammoleküle bezogenen Umsetzung frei wird.

Wir haben z. B. für das Knallgasgemisch  $2 \text{H}_2 + \text{O}_2$  bei  $100^\circ \text{C}$ , also bei  $T_1 = 283^\circ$  die Detonationsgeschwindigkeit nach Berthelot und Vieille zu 2810, nach Dixon zu 2821 gefunden. Für dieses Gemisch ist  $M = 36$  und  $M \cdot Q = 58 \text{ cal}$ .

Wir nehmen nach Kast<sup>97)</sup> für Wasserdampf  $Mc_v = 4,0 + 0,00215 t = 3,413 + 0,00215 T$ . Wenn wir in  $\alpha$  zunächst das zweite Glied vernachlässigen, ergibt sich  $T_2 = 4630^0$ .

Nun ist  $c_p - c_v = 1,985$ , also  $c_p/c_v = 1,0851$  und wir erhalten aus  $\beta' \mu = 1,878$ . Mit diesem Wert ergibt  $\alpha'$ ) jetzt, da  $n_1 = \frac{1}{12}$  und  $n_2 = \frac{1}{18}$ , mit Berücksichtigung des zweiten Gliedes

$$T_2 = 4637^0.$$

Für die Detonationsgeschwindigkeit erhalten wir

$$D = 2865 \text{ m/sec.}$$

Wir sehen also, wie diese aerodynamisch-thermodynamische Theorie der Detonationsgeschwindigkeiten in explosiblen Gasgemischen mit großer Sicherheit die rein chemischen und thermodynamischen Daten im Einklang mit den Messungen zu berechnen gestattet. Sie liefert uns auch eine Anschauung von den wesentlichen makroskopischen Vorgängen bei der Detonation. Natürlich ist der chemische Vorgang hierbei nur summarisch beschrieben, und es wird immer ein Bedürfnis bleiben, den Vorgang in kinetischer Auffassung noch näher zu verstehen. Aber im großen wissen wir heute, was bei der Detonation von explosiven Gasgemischen vorgeht.

Bei der Detonation fester Substanzen ist dies weniger der Fall. Auch hier haben zuerst Berthelot und Vieille die hohen Detonationsgeschwindigkeiten gemessen. Es wurden viele Methoden zur Bestimmung der Detonationsgeschwindigkeit angewandt. So wurde die Geschwindigkeit in langen Sprengstoffsäulen mit dem Boulengé-Flugzeitmesser, dem Funkenchronographen und durch optische Aufzeichnung ermittelt. Außerdem wurde von d'Autriche die Messung mit Hilfe von detonierender Zündschnur, die an beiden Enden durch den Sprengstoff gezündet wurde, durchgeführt. Einen Überblick über die Methoden zur Bestimmung der Detonationsgeschwindigkeit hat in neuester Zeit H. Selle<sup>98)</sup> gegeben.

Wir wissen hier zunächst nur, daß die Detonationsgeschwindigkeit bei ein und demselben Sprengstoff konstant ist.

Wir könnten auch die Detonationsgeschwindigkeit berechnen, wenn wir die Zustandsgleichung der Gase kennen würden.

Denn, da eine Unstetigkeitsfläche durch den Sprengstoff fortschreitet, so muß auf beiden Seiten wieder die Gleichheit der Masse,

<sup>97)</sup> Kast, Spreng- und Zündstoffe. Braunschweig 1921.

<sup>98)</sup> H. Selle, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1937.

des Bewegungsmoments und der Energie bestehen, wir haben also wieder

$$\begin{aligned} D^2 &= V_1^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}, \\ W^2 &= (V_1 - V_2) (P_2 - P_1), \\ \bar{c}_v (T_2 - T_1) &= Q + \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (V_2 - V_1), \\ \gamma^2 \frac{P_2}{V_2} &= \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}. \end{aligned}$$

Haben wir, wie neuerdings A. Schmidt<sup>99)</sup> annimmt, eine Zustandsgleichung wie bei der Pulververbrennung,  $P \cdot V = \frac{RT}{V - \alpha}$ , so können die Gleichungen in ähnlicher Weise gelöst werden.

Schmidt bestimmt dann den Wert von  $\alpha$  so, daß die beobachtete Zunahme der Detonationsgeschwindigkeit mit der Dichte richtig dargestellt wird.  $\alpha$  nimmt mit der Dichte des festen Sprengstoffes ab.

Taffanel und d'Autriche<sup>100)</sup> haben schon vorher die Gleichung  $P = \frac{f \Delta}{1 - \alpha \Delta}$  angewandt. Die Schwierigkeit, wenn  $\Delta$  und  $\alpha$  in der Nähe von 1 liegt, suchen sie dadurch zu vermeiden, daß sie eine unvollständige Zersetzung des Sprengstoffes an der Front annehmen, wenn man dann aus der Erfahrung für alle Sprengstoffe einen gleichen Gang von  $\alpha$  mit  $D$  annimmt, kann man natürlich für andere Fälle  $D$  berechnen. Dies ist nicht ganz empirisch, denn man erhält dann eine Aussage über den Detonationsdruck. R. Becker<sup>101)</sup> hat eine Zustandsgleichung durch Extrapolation der Ergebnisse von Amagat am Stickstoff aufgestellt

$$P_2 = \frac{RT}{V_2} \left( 1 + \frac{K}{V_2} \cdot e^{\frac{K}{V_2}} \right) - a \frac{1}{V_2^2} + K_1 \left( \frac{1}{V_2} \right)^{\beta + 2},$$

oder abgekürzt

$$P_2 = \frac{RT}{V_2} A \left( \frac{1}{V_2} \right) - B \left( \frac{1}{V_2} \right).$$

Bei Verwendung des Molekularvolumens als Einheit ist dann

$$R = \frac{1}{273}; \quad K = 0,0018; \quad a = 0,00249, \quad \beta = 5,$$

$$K_1 = 1,3 \cdot 10^{-17}.$$

<sup>99)</sup> A. Schmidt, ZS. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 1936.

<sup>100)</sup> Taffanel u. d'Autriche, C. R. **135**, 1221, 1595, 1912.

<sup>101)</sup> R. Becker, ZS. f. Physik **4**, 393, 1921.

Für die nach der Detonation entstehenden Nachschwaden nahm er  $K = 0,0015$ , das von  $T$  freie Glied wurde unterdrückt.

Die für Knallquecksilber und Nitroglyzerin berechneten Werte sind in nachstehenden Tabellen 32 und 33 angegeben.

Tabelle 32. Knallquecksilber

$T_2$	$P_2$ (Atm.)	$D$ m/sec.	$W$ m/sec
2000	56 400	3690	585
2500	70 400	4120	655
3000	84 500	4510	706

Für Knallquecksilber fanden Kast und Haid<sup>102)</sup> bei  $\delta = 3,3$   $D = 4500$ , während Kast<sup>103)</sup> 7450 m/sec bei einer Temperatur von  $T = 4250^\circ \text{C}$  angibt.

Tabelle 33. Nitroglyzerin

$T_2$	$P_2$ (Atm.)	$D$ m/sec
2000	92 500	7230
2500	110 500	7930

Nun, wie dem auch sein mag, bezüglich der Zustandsgleichung für Gase, die womöglich noch höhere Dichte haben wie der feste Sprengstoff, ist alles problematisch. Aber die vier obigen Gleichungen sind nichts anderes als eine Beschreibung der Tatsache der Detonation durch Anwendung allgemein anerkannter mechanischer und thermodynamischer Grundsätze.

Aus den Formeln für  $D^2$  und  $W^2$  geht sofort die Gleichung

$$P_2 - P_1 = DW \frac{1}{V_1}$$

hervor.

Hierin ist  $D$  meßbar und  $V_1$  durch die Dichte des festen Sprengstoffs angegeben. Man könnte also den Detonationsdruck  $P_2$  berechnen, wenn man  $W$  bestimmen könnte. Das ist aber, wenn nicht unmöglich, doch sehr schwer.

Wie wir bei den Gasexplosionen gesehen haben, detonieren die Gasgemische bei der Zündung durch einen elektrischen Funken nicht sofort, sondern erst nachdem die Verbrennung eine gewisse

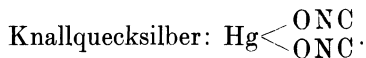
<sup>102)</sup> Kast u. Haid, ZS. f. angew. Chem., S. 43, 1925, Nr. 3.

<sup>103)</sup> Kast, Spreng- und Zündstoffe, S. 370 u. 371, Braunschweig 1921.

Anlaufstrecke durchläuft. Diese Anlaufstrecke kann durch eine kräftige Zündung verkürzt werden. Bei den festen Sprengstoffen liegt der Fall ganz ähnlich. Wir unterscheiden hier gewöhnliche Sprengstoffe und Initialsprengstoffe. Die Initialsprengstoffe sind Sprengstoffe, bei denen die Detonation besonders schnell anläuft und die auch in kleinsten Mengen detonativ zerfallen; sie haben aber keine höhere Detonationsgeschwindigkeit und keine größere Energie als die gewöhnlicher Sprengstoffe. Mit diesen Initialsprengstoffen abgefeuert, detonieren auch die gewöhnlichen Sprengstoffe sofort ohne Anlaufstrecke.

Die gebräuchlichsten Initialsprengstoffe sind Knallquecksilber (Fulminate) und Bleiacid.

Knallquecksilber ist ein Salz der Knallsäure  $\text{CNOH}$



Bleiacid ist ein Salz der Stickstoffwassersäure  $\text{N}_3\text{H}$



Die Initialsprengstoffe werden in Hülsen aus Aluminium oder Kupfer eingeschlossen und haben je nach dem Verwendungszweck noch Zusätze. Die Zündung der Sprengkapseln erfolgt meistens elektrisch über einen Glühzünder oder direkt durch eine Zeitzündschnur.

## Namenverzeichnis

Abel 43.  
Amagat 133.  
Antony, Chevalier de 4.  
Arago 6.  
Arey, Chevalier de 5.  
Autrich, de 132.

**Bach** 104.  
Becker, K. 30.  
Becker, R. 125.  
Bernouilli 3.  
Berthelot 118, 132.  
Bjerrum 21.  
Bodlien 73, 98.  
Bollé 12, 29, 36, 60, 70, 98, 117.  
Bunsen 118.  
Burlot 15, 61.

**Cassini jun.** 5.  
Cavali 5.  
Chaleat 37.  
Chapman 128.  
Charbonnier 3, 20, 21, 27, 50, 65.  
Charpy 20.  
Che Pei Lo 96.  
Clausius 42, 119.  
Cranz 30, 33, 54, 56, 73, 95.  
Crussard 121.

**Deering** 13.  
Didion 5.  
Dixon 119.

**Euler** 4.

**Gabeaud** 94.  
Gossot 27, 46, 57.

**Haber** 115.  
Hänert 97, 113.  
Haid 134.  
Heydenreich 14, 34.

Höniger 14.  
Horstig 94.  
Hugoniot 25, 27, 34.  
Hutton 5.

**Illgen** 22.

**Joachim** 22.  
Jouguet 123, 128.  
Justrow 91.

**Kast** 132.  
Kellner 13.  
Kutterer 96.

**Lagrange** 6, 27.  
Lamothe 20.  
Langweiler 76, 83.  
Le Boulengé 5, 32.  
Le Chatelier 118.  
Leduc 36.  
Léfèvre 29, 37.  
Libessart 94.  
Liouville 27, 46, 57.  
Lorenz 80, 94.  
Love 27.

**Mallard** 118.  
Moisson 7.  
Morin 5.  
Muraour 116, 127.

**Nernst** 21, 118.  
Neumann 5.  
Noble 6.  
Nowakowski 94.

**Petavel** 21.  
Pidduc 27.  
Pier 21, 125.  
Piobert 5, 45.  
Patrier 27.

Pohl 113.  
Poisson 76.  
Poncelet 6.  
Poppenberg 115.

**R**ésal 6, 55.  
Riemann, 120, 130.  
Robins 4.  
Rodmann 6.  
Rohne 60.  
Rothe 56.  
Rumford 4.

**S**arrau 7, 17, 55, 116, 118.  
Schardin 33, 95.  
Schmidt 133.  
Schmitz 21, 45, 73.  
Schwarz 97.

Schwinning 113.  
Sébert 25, 28, 34, 90.  
Seehase 14.  
Selle 132.  
Siegel 125.  
Spetzler 95.

**T**affanel 133.

**U**chatius 6.

**V**alier 34.  
Vieille 7, 16, 45, 46, 117, 132.  
Voituriez 94.

**W**aals, van der 42.  
Wolff 20, 29, 44, 99.

**Z**edlitz, von 40.

# Sachverzeichnis

- Abelsche Gleichung 43, 114.  
Abkühlung der Pulvergase 43, 116.  
Abweichung bei der Druckmessung 13.  
Anfangsgeschwindigkeit (Meßgeräte) 32.  
Aufgabenbereich der inneren Ballistik 1.  
Austrittsfunke 30.  
Autofrettage 113.  
Automatische Waffen 8.
- B**  
Bachsche Formel 109.  
Beanspruchung des Materials 104.  
Bensberg-Gitter 24.  
Bolléscher Büchsen­gasdruckmesser 12.  
Bolléscher Rücklaufmesser 29.  
Boulengé-Flugzeitmesser 32.  
Braunes Pulver 44.  
Büchsen 7.  
Büchsen­gasdruckmesser 12.
- D**  
Degressives Pulver 50.  
Dehnung 104.  
Dehnungstheorie 113.  
Detonation 114, 117.  
Detonationsgeschwindigkeit 118.  
Disjunktionsmarke 32.  
Drall 91.  
Druckentwicklung 42.  
Druckmeßgeräte 10.
- E**  
Eigenschwingungsdauer der Feder 22.  
Einblockrohr 113.  
Einpreßwiderstand 74, 90.  
Einteilung der Waffen 7.  
Empirische Formeln 34.  
Energiebilanz 56.  
Energiegleichung 56, 77.
- Entropie 129.  
Explosion 114.  
Explosionswärme 114.
- F**  
Fallhammermethode 14, 94.  
Faustfeuerwaffen 7.  
Federdruckindikator 21.  
Festigkeitslehre 103.  
Fingierte Masse 82.  
Flinten 7.  
Flugzeitmesser 32.  
Freiflug 103.  
Funkenphotographie 33.
- G**  
Gasdruckmessung 10.  
Gasgleichgewicht 115.  
Gaszusammensetzung 114.  
Geschichte der inneren Ballistik 3.  
Geschoßgeschwindigkeit, Messung 24, 32.  
Geschoßwiderstand im Rohr 56, 73, 77, 90.  
Gestaltänderungstheorie 113.  
Gewehr­gasdruckmesser 11.
- H**  
Handfeuerwaffen 7, 63.  
Hauptgleichung der inneren Ballistik 55.  
Hauptproblem der inneren Ballistik 55.  
Hochfrequenzfunkenkinematographie 33.  
Hooksches Gesetz 104.  
Hugoniot-Gleichung 122.
- I**  
Initialsprengstoff 135.
- K**  
Kaliber 8.  
Kaltverfestigung 113.  
Kernrohr 111.  
Kovolumen 42, 48.  
Kraft des Pulvers 90.



Krupp-Schmitzsche Verbrennungsbombe 73.  
Kupferstauochylinder 10.  
Kurz Waffen 7.

Ladedichte 43.  
Lagrangesches Problem 27, 65.  
Laufsprengung 117.  
Lebhaftigkeit des Pulvers 51.  
Leduc'sche Formel 36.  
Leistendruck 101.

Mantelrohr 111.  
Mehrsichtige Beanspruchung 113.  
Membrandruckindikator 22.  
Meißei 10.  
Meißel 6.

Nitroglyzerinpulver 44, 118.  
Nitrozellulosepulver 46, 114.  
Normalspannung 105.

Optischer Gewehrrücklaufmesser 29.

Patronenbezeichnung 8.  
Pendel, ballistisches 5.  
Pendelkanone 97.  
Piezoelektrische Druckmessung 22, 97.

Piston libre 15.  
Progressives Pulver 51.  
Pulverkonstante 51.  
Pulverkraft 43.  
Pulverpreßkörper 45.  
Pulververbrennung 42.

Quarz 22.  
Querkontraktion 104.  
Quetschbelastung 93.

Reduzierte Werte 76.  
Reibungswiderstand 73, 90.  
Rücklaufmesser 14, 24.

Schießzwinde 23.  
Schubspannung 105.  
Schubzahl 106.  
Schwadengeschwindigkeit 126.  
Schwarzpulver 42, 45, 117.  
Sébertscher Faktor 28, 35, 83.  
Sekundäre Probleme 3, 90.  
Spannung 105.  
Sprengstoffe 117.  
Stauhtabelle 10.  
Stauchträgeit 17.  
Stauchzylinder 6, 10.  
Stoßwelle 119.

Thermochemie der Verbrennungsvorgänge 114.

Verbrennungsbombe 15.  
Verbrennungsgeschwindigkeit 46, 51.  
Verbrennungsgesetz 42, 114.  
Verbrennungstemperatur 43.  
Verbrennungsweise des Pulvers 42.  
Viellsche Verbrennungsbombe 20, 46.

Wärmeabfluß 116.  
Wärmetönung 114.  
Wassergasreaktion 115.  
Wellendruck 117.  
Wirkungsgrad 82.

Ziel der inneren Ballistik 2.  
Zugkurven 31.  
Zustandsgleichung 42.